LAF1, Dodatak 8. predavanju (29.11.2021.)

Pojmovi *baze* i *dimenzije* fundamentalni su u linearnoj algebri. Zato je uvijek korisno, kada imamo vektorski prostor definiran nad nekim poljem $\mathbb{F}$, znati njegovu dimenziju; posebno ako je taj prostor konačno dimenzionalan.

Dimenzija kvocijentnog prostora i dimenzija sume potprostora

U ovom dodatku 8. predavanja dokazat ćemo jedan važan teorem koji govori kako računati dimenziju kvocijentnog vektorskog prostora i dimenziju sume dvaju potprostora nekog većeg vektorskog prostora.

Prvo se podsjetimo definicija. Neka je $\mathbb{F}$ neko polje (npr. polje realnih brojeva $\mathbb{R}$). Ako je zadan neki $\mathbb{F}$-vektorski prostor V i ako je $W \leq V$ njegov potprostor, definirali smo **kvocijentni prostor**

$$V/W := \{x + W \mid x \in V\}.$$

Elementi od V/W su zapravo podskupovi $x + W = \{x + w \mid w \in W\} \subseteq V$, gdje takav konkretan skup $x + W$ zovemo *klasom* elementa x. (Primijetimo kako su elementi $x + W$ toga skupa V/W zapravo 'jednako veliki' kao i potprostor W. Na predavanju smo bili dali primjer kada je $V = \mathbb{R}^2$, realna 2-dimenzionalna ravnina, a W je neki pravac u toj ravnini koji prolazi ishodištem $(0, 0)$. I onda smo vidjeli kako se V/W može shvatiti kao skup svih pravaca u ravnini $V = \mathbb{R}^2$ koji su paralelni sa pravcem W.) Na tim klasama su definirane operacija *zbrajanja*

$$(x + W) + (y + W) := (x + y) + W, \quad \forall x, y \in V,$$

i operacija *množenja skalarom*

$$(\lambda, x + W) \mapsto \lambda \cdot (x + W) := \lambda x + W.$$

Imamo sljedeći rezultat; čiji detaljan dokaz (posebno dio o tzv. "dobroj definiranosti" danih dviju operacija) i ovdje dajemo.

Teorem 0.1. *Skup V/W, uz gore definirane operacije zbrajanja i množenja skalarima, je vektorski prostor (nad poljem $\mathbb{F}$).*

Dokaz. Prvo moramo dokazati da su gore dane definicije zbrajanja i množenja skalarima *dobro definirane.* To znači sljedeće. Recimo da imamo vektore $x, x_1, y, y_1 \in V$ takve da je

$$x + W = x_1 + W \quad \text{i} \quad y + W = y_1 + W.$$

Prvo pitanje je: Je li onda

$$(x + W) + (y + W) = (x + y) + W = \mathbf{?} = (x_1 + y_1) + W = (x_1 + W) + (y_1 + W);$$

tj., ovisi li to zbrajanje klasa o izboru njihovih *reprezentanata*? (Za npr. klasu $x + W$ je element $x \in V$ reprezentant te klase.) Ali primijetimo kako jednakost skupova $x + W = x_1 + W$ posebno znači da je $x + W \subseteq x_1 + W$; i isto tako $x + W \supseteq x_1 + W$. Posebno, budući potprostor $W \leq V$ sadrži nul-vektor 0_V od V, onda imamo da je $x = x + 0_V \in x + W = x_1 + W$; tj., $x \in x_1 + W$. Ali to znači da postoji neki $w \in W$ takav da je $x = x_1 + w \iff x - x_1 = w \in W$. Tako smo pokazali da iz jednakosti $x + W = x_1 + W$ slijedi da je $x - x_1 \in W$. Ali ako bismo "išli obratnim putem", lako bismo vidjeli da vrijedi i obratna implikacija; tj., ako je $x - x_1 \in W$, onda je $x + W = x_1 + W$. Drugim riječima imamo ekvivalenciju

$$x + W = x_1 + W \iff x - x_1 \in W. \qquad (*)$$

Sasvim analogno, imamo i ekvivalenciju

$$y + W = y_1 + W \iff y - y_1 \in W. \qquad (**)$$

No onda dalje imamo:

$$x - x_1 \in W \quad \text{i} \quad y - y_1 \in W \implies (x+y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in W;$$

pri čemu, jasno, koristimo da je W zatvoren za zbrajanje vektora, jer je potprostor. Ukoliko bismo stavili $a := x+y$ i $a_1 := x_1+y_1$, onda desnu stranu gornje implikacije možemo napisati kao $a - a_1 \in W$. Ali sasavim analogno kao u $(*)$ i $(**)$, imamo da je

$$a + W = a_1 + W \iff a - a_1 \in W.$$

Drugačije rečeno, ako imamo da je $x + W = x_1 + W$ i $y + W = y_1 + W$, onda je i

$$(x + W) + (y + W) = (x + y) + W = (x_1 + y_1) + W = (x_1 + W) + (y_1 + W);$$

što je potvrdan odgovor na gornje pitanje. Dakle, dano je zbrajanje u V/W doista dobro definirano. Slično, pretpostavimo da imamo skalar $\lambda \in \mathbb{F}$, te vektore $x, y \in V$ takve da je $x + W = y + W$. Tada iz zadnje jednakosti imamo da je i $x - y \in W$, a onda i $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y \in W$. Analogno kao u $(*)$ imamo da je onda i $\lambda x + W = \lambda y + W$, što zapravo pokazuje da niti dano množenje skalarima ne ovisi o izboru reprezentanata. Tojest, ono je dobro definirano.

Sada treba vidjeti da je definirani skup V/W doista vektorski prostor. Za to treba provjeriti da on zadovoljava sva ona svojstva (Z_1)–(Z_4), te (S_1)–(S_3), iz definicije vektorskog prostora. Naprimjer, za asocijativnost mi moramo vidjeti da li za neka tri vektora $x, y, z \in V$ imamo da je

$$\big((x + W) + (y + W)\big) + (z + W) = \mathbf{?} = (x + W) + \big((y + W) + (z + W)\big).$$

No za lijevu stranu posljednjeg izraza, koristeći definiciju zbrajanja u V/W, imamo da je ona jednaka

$$\big((x + W) + (y + W)\big) + (z + W) = ((x + y) + W) + (z + W) = ((x + y) + z) + W.$$

A desna strana gornjeg izraza je

$$(x + W) + \big((y + W) + (z + W)\big) = \cdots = (x + (y + z)) + W.$$

Ali kako asocijativnost zbrajanja vektora vrijedi u V (jer je V vektorski prostor), imamo posebno da je $(x + y) + z = x + (y + z)$, a onda je jasno da imamo i traženu asocijativnost našeg novog zbrajanja u V/W.

Sasvim je jasno da je nul-vektor u V/W klasa $0_V + W = W \in V/W$. Isto tako je jasno i da je naše zbrajanje komutativno; tj., da za bilo koje $x, y \in V$ imamo da je

$$(x + W) + (y + W) = (y + W) + (x + W).$$

Konačno za $x + W \in V/W$ je njegov *suprotni vektor* dan kao

$$-(x + W) = (-x) + W.$$

Tako su provjerena spomenuta svojstva (Z_1)–(Z_4), iz definicije vektorskog prostora. Lako pokazujemo i svojstva (S_1)–(S_3). (Napravite to sami za domaću zadaću!!!) $\square$

Recimo da sada imamo $\mathbb{F}$-vektorski prostor V i neka dva njegova potprostora $U, W \leq V$. Onda definiramo **sumu potprostora**

$$U + W := \langle U \cup W \rangle = \text{linearna ljuska podskupa } U \cup W \subseteq V.$$

Imamo sljedeću propoziciju koja daje sasvim eksplicitan opis tako definiranog novog potprostora od V. Poradi potpunosti izlaganja, i tu ćemo propoziciju dokazati.

Propozicija 0.2. *Za vektorski prostor V i njegove potprostore $U, W \leq V$ imamo*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, \ \ w \in W\};$$

tj., suma potprostora $U + W$ sastoji se od svih suma vektora $u + w$, za bilo koje $u \in U$ i $w \in W$.

Dokaz. Definirajmo

$$S := \{u + w \mid u \in U, \ \ w \in W\};$$

tj., S je desna strana jednakosti iz tvrdnje propozicije. Mi moramo pokazati da je $U + W = S$; tj., po definiciji jednakosti skupova, prvo da je $U + W \subseteq S$, a onda da je i $S \subseteq U + W$.

Prvo pokazujemo inkluziju $U + W \subseteq S$. Za to se sjetimo kako smo definirali neki potprostor danog vektorskog prostora V, koji je generiran podskupom $X \subseteq V$. Definicija je bila:

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subseteq C \leq V} C;$$

tj., $\langle X \rangle$ je presjek svih potprostora $C \leq V$ koji sadrže dani podskup X od V. (Drugim riječima, $\langle X \rangle$ je *najmanji* potprostor od V koji sadrži skup X.)

Sada je jasno sljedeće: Ukoliko pokažemo da je S potprostor od V, te pokažemo da S sadrži skup $X := U \cup W \subseteq V$, onda ćemo imati da je

$$U + W = \langle X \rangle \subseteq S; \qquad (\bullet)$$

što nam i treba. (Naime, imat ćemo da je S jedan od C-ova iz gornje definicije.) Ali za proizvoljan $u \in U$ imamo, koristeći da je nul-vektor $0_V \in W$, da je onda $u = u + 0_V \in S$. Znači da je $U \subseteq S$. Sasvim analogno imamo i da je $W \subseteq S$. Zaključujemo da je i

$$X := U \cup W \subseteq S,$$

kako smo i tvrdili. Sad još moramo pokazati da je $S \leq V$, vektorski potprostor. Ali po kriteriju potprostora dovoljno je pokazati da za dva vektora $s, s_1 \in S$, i za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$, imamo da je $s - s_1 \in S$, te da je $\lambda s \in S$. No, po definciji skupa S, imamo da postoje neki $u, u_1 \in U$ i $w, w_1 \in W$ takvi da je $s = u + w$ i $s_1 = u_1 + w_1$. No onda je

$$s - s_1 = (u + w) - (u_1 - w_1) = (u - u_1) + (w - w_1) \in S.$$

Gore smo koristili da je $u_0 := u - u_1 \in U$ (jer je U potprostor od V), i da je $w_0 := w - w_1 \in W$ (jer je W potprostor od V); a onda i definiciju skupa S. Time je pokazana inkluzija $(\bullet)$.

Za obratnu inkluziju radimo ovako. Pretpostavimo da je potprostor $C \leq V$ proizvoljan takav da on sadrži skup $X := U \cup W$. Ukoliko pokažemo da onda imamo $S \subseteq C$, odmah će slijediti (zbog proizvoljnosti promatranog C) da je i

$$S \subseteq \bigcap_{X \subseteq C \leq V} C = U + W;$$

što i moramo dobiti. Ali ako je potprostor $C \leq V$ takav da on sadrži $U \cup W$, onda on posebno sadrži i U i sadrži W. No onda za bilo koje vektore $u \in U$ i $w \in W$ posebno imamo da su $u, w \in C$. No kako je C i sam vektorski prostor, onda je posebno zbroj $u + w \in C$. Znači, pokazali smo da za bilo koje vektore $u \in U$ i $w \in W$ zbroj $u + w$ mora biti u C. Ali, po definiciji skupa S, to znači da imamo inkluziju $S \subseteq C$, kako smo i tvrdili. Time je ova propozicija dokazana. □

Sada možemo dokazati i centralni rezultat ovog dodatka.

Teorem 0.3. *Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor definiran nad bilo kojim poljem $\mathbb{F}$, te neka su $U, W \leq V$ njegovi potprostori.*

(i) (dimenzija kvocijentnog prostora)

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

(ii) (dimenzija sume potprostora)

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Dokaz. (i) Uzmimo bilo koju bazu $(w_1, \ldots, w_m)$ prostora W, i onda ju nadopunimo (općenito, na nejedinstven način) nekim vektorima $(v_1, \ldots, v_k)$, gdje su $v_i \in V$, do baze

$$\mathcal{B} := (w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_k)$$

prostora V.

Tvrdnja 1. *Tada je $\mathcal{B}_{V/W} := (v_1 + W, \ldots, v_k + W)$ baza kvocijentnog prostora V/W, i posebno imamo*

$$\dim V - \dim W = (m + k) - m = k = \dim V/W.$$

$[[$ Proizvoljan $v \in V$ možemo raspisati po vektorima baze $\mathcal{B}$ kao $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j$, gdje su skalari $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{F}$. I onda, jer su svi $w_j \in W$, imamo

$$v + W = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + W = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i + W).$$

Kako je očito vektor $v + W$ iz V/W proizvoljan, kao posljedicu imamo da je

$$V/W = \langle \mathcal{B}_{V/W} \rangle.$$

Dakle, $\mathcal{B}_{V/W}$ je skup izvodnica za kvocijentni prostor V/W. Još pokažimo da je to skup lin. nezavisnih vektora. U tu svrhu pretpostavimo da za neke skalare $\alpha_i \in \mathbb{F}$ imamo

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (v_i + W) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + W = 0_V + W = 0_{V/W} \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in W.$$

Ali to znači da postoje neki skalari $\beta_j \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} (-\beta_j) w_j = 0_V.$$

No kako je $\mathcal{B}$ baza prostora V, skup tih vektora je posebno lin. nezavisan. Iz toga slijedi da su svi skalari α_i, β_j jednaki nuli; i posebno je znači $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Tako smo pokazali linearnu nezavisnost vektora iz $\mathcal{B}_{V/W}$, čime je Tvrdnja 1 dokazana.$]]$

(ii) Sada uzmimo bilo koju bazu $(x_1, \ldots, x_k)$ prostora $U \cap W$, i onda nju nadopunimo nekim vektorima $u_1, \ldots, u_\ell \in U$ do baze

$$\mathcal{B}_U = (x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots u_\ell)$$

prostora U. Jasno, kako je $U \cap W \leq U$, to možemo. Tu posebno primijetimo kako za dimenzije imamo:

$$\dim(U \cap W) = k \quad \text{i} \quad \dim U = k + \ell. \qquad (\triangle 1)$$

Dalje, neka je

$$(s_i + U, \ldots, s_m + U) \ \text{ neka baza prostora } (U + W)/U,$$

za neki $m \in \mathbb{N}$ i vektore $s_i \in U + W$ koji su naspisani kao

$$s_i = y_i + w_i, \quad \text{za neke } y_i \in U \text{ i } w_i \in W.$$

(Po prethodnoj propoziciji to možemo.) Budući su $y_i \in U$, onda je $s_i + U = w_i + U$; tj.,

$$(w_i + U, \ldots, w_m + U) \ \textsf{ je baza prostora } (U + W)/U \ . \qquad (\triangle 2)$$

Sada ćemo dokazati sljedeće.

Tvrdnja 2. *Imamo:*

(1) $\mathcal{B}_W := (x_1, \ldots, x_k, w_1, \ldots, w_m)$ *je baza prostora* W*;*

(2) $\mathcal{B} := \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = (x_1, \ldots x_k, u_1, \ldots, u_\ell, w_1, \ldots, w_m)$ *je baza prostora* $U + W$*.*

$[[$ **(1)** Neka je $w \in W$ proizvoljan vektor. Onda, imajući na umu $(\triangle 2)$, za vektor $w + U \in (U + W)/U$ imamo

$$w + U = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (w_i + U) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i\Big) + U \quad \Longleftrightarrow \quad w - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \in U,$$

za neke skalare $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Znači, jer su $w, w_i \in W$, da je $w - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \in U \cap W$; tj.,

$$w - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j \quad \Longleftrightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j, \quad \text{za neke } \beta_j \in \mathbb{F}.$$

Tako smo pokazali da se svaki vektor $w \in W$ može raspisati po vektorima iz $\mathcal{B}_W$; tj.,

$$\textsf{skup } \mathcal{B}_W \textsf{ je skup izvodnica prostora } W.$$

Preostaje vidjeti da je $\mathcal{B}_W$ i lin. nezavisan skup. No pokazat ćemo ovdje jaču tvrdnju, koja će nam i trebati u dokazu tvrdnje **(2)**; da je nadskup $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}_W$ lin. nezavisan. (Tada je, jasno, i sam $\mathcal{B}_W$ lin. nezavisan.) U tu svrhu pretpostavimo da za neke skalare $\lambda_i, \mu_j, \nu_t \in \mathbb{F}$ imamo

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_j + \sum_{t=1}^{m} \nu_t w_t = 0_V. \qquad (\triangle 3)$$

Onda posebno, jer su svi $x_i, u_j \in U$, imamo da je

$$\sum_{t=1}^{m} \nu_t w_t + U = \sum_{t=1}^{m} \nu_t w_t + \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_j\Big) + U = 0_V + U = 0_{V/U};$$

tj., imamo da je

$$\sum_{t=1}^{m} \nu_t (w_t + U) = 0_{V/U}.$$

Ali po ($\triangle 2$) posebno imamo da su vektori $(w_i + U, \dots, w_m + U)$ lin. nezavisni, u prostoru V/U. I zato zaključujemo da su svi skalari $\nu_t = 0$. Sada je jasno da jednakost ($\triangle 3$) postaje

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_j = 0_V.$$

No kako je $\mathcal{B}_U$ baza od U, to je possebno i lin. nezavisan skup. Zaključujemo da su svi skalari

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_\ell = 0.$$

Time je dokaz tvrdnje da je skup $\mathcal{B}$ lin. nezavisan, a onda i dokaz **(1)**, gotov.

(2) Za dokaz ove tvrdnje treba još pokazati:

$\mathcal{B}$ je skup izvodnica prostora $U + W$.

Za to vidjeti uzmimo proizvoljan vektor $v \in U + W$. Po prethodnoj propoziciji v se može napisati kao $v = u + w$, za neke $u \in U$ i $w \in W$. Ali kako je $u \in \langle \mathcal{B}_U \rangle = U$ i $w \in \langle \mathcal{B}_W \rangle = W$, imamo da je

$$v = u + w \in \langle \mathcal{B} \rangle \quad \Longrightarrow \quad U + W = \langle \mathcal{B} \rangle;$$

što pokazuje posljednju tvrdnju, a onda i **(2)**.]]

Za završetak dokaza našeg teorema treba primijetiti da je

$$\dim W = k + m \quad \text{i} \quad \dim(U + W) = k + \ell + m.$$

Imajući na umu ($\triangle 1$), slijedi:

$$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = (k + \ell) + (k + m) - k = k + \ell + m = \dim(U + W).$$

Dokaz je gotov. $\square$