1. LAF2, Predavanje 25. travnja 2022.

Napomena. Današnje predavanje, svojim sadržajem, ima cca 25% do 30% materije više negoli se može dosadašnjim tempom predavanja napraviti u standardnih 2×45 minuta. Ali treba naglasiti kako od, recimo tako, imalo delikatnijiih stvari samo dokazujemo dvije jednostavne propozicije (Propozicije 1.2 i 1.3), te jedan malo zahtjevniji teorem (Teorem 1.4). Ostatak materije je uvođenje definicija za neke nove pojmove, te davanje nekih kratkih komentara o istima. Na kraju je dan i Dodatak, u kojemu se tek definira pojam *Liejeve algebre.* (Ta je materija de facto stavljena kao opcionalna, za one koji žele bar znati što je to, po definiciji, "Liejeva algebra".)

Dodatni razlog za ovakvo, malo sadržajem opsežnije, predavanje je i ovaj. Kako sada stvari stoje s preostalom materijom, ukoliko ne bude nekih nepredviđenih okolnosti, mi bismo trebali u još 4 (četiri) kontaktna predavanja završiti s cijelim kolegijem; barem što se tiče prdavanja. (O nastavi na vježbama odluku donosi asistentica Vukorepa!) Dakle, po kalendaru, zadnje bi predavanje bilo 23. svibnja. (Ponavljam, ukoliko ne bude nekih 'specijalnih okolnosti'.) Pritom, kako se to radilo svih proteklih akademskih godina, negdje sredinom svibnja ja ću i opet staviti na web stranicu jedan pdf s opcionalnim materijalom, o primjeni linearne algebre u rješavanju *običnih diferencijalnih jednadžbi.*

Na zadnjem predavanju (11. travanj 2022.) kao posljednji rezultat dokazali smo važan Binet- Cauchyjev teorem. Podsjetimo se na njegov iskaz.

Teorem 1.1. (Binet-Cauchy; skripta [Primc, 9.1.1])

Za (kvadratne) matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B.}$$

3.2. Determinanta linearnog operatora

Sve što smo do sada radili o determinanti bilo je vezano uz (kvadratne) matrice. Sada nam je cilj vidjeti kako definirati determinatu linearnog operatora. Jasno, operator koji ćemo gledati bit će iz V u V, gdje je V neki konačno dimenzionalan vektorski prostor. Ali prije toga uvedimo još jedan koristan pojam.

Definicija. Kažemo da je neka funkcija (na matricama) $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ **invarijanta** ako vrijedi

$$f(T^{-1}AT) = f(A), \qquad \forall T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}),\ \forall A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Sljedeća jednostavna propozicija pokazuje kako invarijante postoje.

Propozicija 1.2. *Funkcija determinante* $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *je invarijanta.*

Dokaz. Za regularnu matricu T i proizvoljnu matricu A imamo

$$\begin{aligned} \det(T^{-1}AT) &= (\text{Binet-Cauchyjev teorem}) = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T \\ &= \left(\det T^{-1} \cdot \det T\right) \cdot \det A = \det(T^{-1}T) \cdot \det A \\ &= \det I \cdot \det A = \det A. \end{aligned}$$

$\square$

Napomena. Primijetimo da je i funkcija **trag** $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, definirana s

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

također invarijanta. Naime, to slijedi iz činjenice da za dvije matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ imamo

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

(Pokažite to! Ako ne vidite odmah kako izgleda račun, probajte najprije s 2×2 matricama.) I onda, ako stavimo u gornju jednakost $A \leftrightarrow T^{-1}A$ i $B \leftrightarrow T$, posebno imamo

$$\mathrm{tr}(T^{-1}AT) = \mathrm{tr}\big((T^{-1}A)T\big) = \mathrm{tr}\big((TT^{-1})A\big) = \mathrm{tr}(IA) = \mathrm{tr}(A).$$

Neka je sada V (konačno dimenzionalan) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $A \in \mathcal{L}(V)$ linearan operator. Neka su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ dvije baze od V, te neka je $T_{\mathcal{E}} = T(\mathcal{E})$ matrica prijelaza između te dvije baze. Znamo da za matrične prikaze od A u tim bazama imamo (v. skripta [Primc, 8.6.19])

$$A(\mathcal{E}') = T_{\mathcal{E}}^{-1} A(\mathcal{E}) T_{\mathcal{E}},$$

I onda, jer je funkcija determinante invarijanta,

$$\det A(\mathcal{E}') = \det A(\mathcal{E}). \tag{$\triangle$}$$

Definicija. Ako je $A \in \mathcal{L}(V)$ linearan operator, definiramo **determinantu operatora** A s

$$\det A := \det A(\mathcal{E}),$$

gdje je $\mathcal{E}$ bilo koja baza prostora V.

Napomena. (1) Primijetimo kako iz ($\triangle$) slijedi da je naša definicija determinante lin. operatora dobra; tj., ona ne ovisi o izboru baze prostora V. Preciznije rečeno, ako za lin. operator A imamo njegove prikaze, $A(\mathcal{E}')$ i $A(\mathcal{E})$, u dvije baze $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ od V, determinante tih dviju matrica su iste.

(2) Primijetimo kako i za linearne operatore vrijedi *Binet-Cauchyjev teorem*:

Theorem 1.1′. *Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor i neka su $A, B \in \mathcal{L}(V)$ dva linearna operatora. Tada je*

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B.$$

• Specijalna linearna grupa $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$

Sjetimo se da smo na prvom predavanju iz *Lin. algebre 2* definirali pojam grupe, te da smo kasnije definirali *opću linearnu grupu* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ kao skup svih matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ čija je determinanta $\det A \neq 0$.

Ovu kratku podtočku završavamo uvođenjem još jednog važnog matematičkog objekta; preciznije govoreći, jedne grupe koja je podgrupa od $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Naime, za proizvoljno polje $\mathbb{F}$ definirajmo skup

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) := \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \det A = 1\}.$$

Propozicija 1.3. *Skup* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$*, uz standardnu operaciju množenja matrica, jest grupa; to je tzv.* **specijalna linearna grupa** $n \times n$ *matrica. Preciznije rečeno,* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ *je podgrupa opće linearne grupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$*.*

Dokaz. Ako su matrice $A, B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$, tj. imamo $\det A = \det B = 1$, onda po Binet-Cauchyjevonm teoremu imamo da je

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1.$$

Znači, produkt dvije matrice iz $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ je također iz $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.

Sad gledajmo što je s invertiranjem matrica. Ako je $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ bilo koja regularna matrica, onda imamo

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \implies \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

To posebno daje da ako je $\det A = 1$, onda je i $\det A^{-1} = 1$; tj., ako je $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$, onda je i $A^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.

Time je pokazano da je $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ doista grupa. $\square$

3.3. Gramova determinanta

Cilj ove podtočke je dati jedan koristan kriterij po kojemu možemo provjeravati je li zadani konačan skup vektora u nekom unitarnom prostoru linearno nezavisan, ili nije. U tu svrhu neka je polje $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. I neka je $\big(V, (\cdot\,|\,\cdot)\big)$ unitaran prostor; tj., V je (konačno ili beskonačno dimenzionalan) vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, i $(\cdot\,|\,\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ je skalarni produkt. Onda imamo sljedeću definiciju.

Definicija. Za vektore $v_1, \ldots, v_n \in V$, matrica

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \big((v_i|v_j)\big) := \begin{pmatrix} (v_1|v_1) & \ldots & (v_1|v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (v_n|v_1) & \ldots & (v_n|v_n) \end{pmatrix}$$

Zove se **Gramova matrica**. Nadalje, determinanta

$$\Gamma(v_1, \ldots, v_n) := \det G(v_1, \ldots, v_n)$$

zove se **Gramova determinanta**.

Napomena. Pojmovi Gramova matrica i Gramova determinanta zovu se u čast njemačkog matematičara Grama; J. P. Gram, 19. stoljeće.

Teorem 1.4. (skripta [Primc, 9.5.2])

Vektori $v_1, \ldots, v_n \in V$ *su linearno nezavisni ako i samo ako je Gramova determinanta* $\Gamma(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$*.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Za dokaz ove implikacije pretpostavimo:

Vektori $v_1, \ldots, v_n \in V$ *su linearno nezavisni.*

Onda neka je j-ti stupac u Gramovoj matrici dan kao $s_j = \begin{pmatrix} (v_1|v_j) \\ \vdots \\ (v_n|v_j) \end{pmatrix}$. Pa gledajmo sustav jednadžbi, u nepoznanicama $x_1, \ldots, x_n$, dan s

$$x_1 s_1 + \cdots + x_n s_n = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(v_1|v_1) + \cdots + x_n(v_1|v_n) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_1(v_n|v_1) + \cdots + x_n(v_n|v_n) = 0 \end{cases}$$

Sada računamo ovako. Pomnožimo i-tu jednadžbu gornjeg sustava s $\overline{x_i}$, za svaki i, te sve tako dobivene jednadžbe zbrojimo. (Jasno, $\overline{x_i}$ je kompleksni konjugat broja $x_i \in \mathbb{C}$. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, onda jasno množimo s x_i; namjesto s $\overline{x_i}$.) Dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\big(x_1(v_i|v_1) + \cdots + x_n(v_i|v_n)\big) = 0$$

što je dalje ekvivalentno s

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\big(x_1(\overline{x_i}v_i|v_1) + \cdots + x_n(\overline{x_i}v_i|v_n)\big) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n}\big((\overline{x_i}v_i|\overline{x_1}v_1) + \cdots + (\overline{x_i}v_i|\overline{x_n}v_n)\big) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n}\Big(\overline{x_i}v_i \mid \sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}v_j\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}v_i \mid \sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}v_j\Big) = 0. \end{aligned}$$

(U predposljednjoj jednakosti koristili smo linearnost skalarnog produkta u prvom argumentu.) Sada, ako označimo vektor $w := \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}v_i \in V$, onda se gornja jednakost može zapisati kao

$$(w|w) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{(pozitivna definitnost)} \;\; \Rightarrow \;\; w = \sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}v_i = \mathbf{0}.$$

I onda, koristeći činjenicu da su v_i-ovi lin. nezavisni, slijedi da su nužno SVI

$$\overline{x_i} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_i = 0.$$

Zaključak: Stupci $s_1, \ldots, s_n$ su linearno nezavisni. Ali onda, po Teoremu 1.6 s predavanja od 6. travnja (vidi [Primc, 6.4.16]), znamo da je

$$\det(s_1, \ldots, s_n) = \Gamma(v_1, \ldots, v_n) \neq 0.$$

($\Leftarrow$) Za dokaz ove obratne implikacije pretpostavimo:

$$\Gamma(v_1, \ldots, v_n) \neq 0.$$

I neka su onda neki skalari $x_i \in \mathbb{F}$ takvi da je linearna kombinacija

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0;$$

pa pokažimo da su nužno SVI $x_i = 0$. (To će, po definiciji linearne (ne)zavisnosti, dati da su v_i-ovi doista linearno nezavisni.) Sada, ako gornju jednakost vektora pomnožimo skalarnim produktom s v_i (zdesna!), dobivamo

$$\begin{aligned}
&\big(x_1v_1+\cdots+x_nv_n \mid v_i\big)=(0,v_i)=0, \quad (\forall i)\\
\Leftrightarrow\ \ & x_1(v_1|v_i)+\cdots+x_n(v_n|v_i)=0, \quad (\forall i)\\
\Leftrightarrow\ \ & \text{(hermitska simetrija)} \ \Leftrightarrow\ \Big\{\overline{x_1}(v_i|v_1)+\cdots+\overline{x_n}(v_i|v_n)=0, \quad (\forall i).
\end{aligned}$$

Ali posljednje napisan (homogeni!) sustav ima za *determinantu sustava* upravo Gramovu determinantu $\Gamma(v_1,\ldots,v_n)$, koja je $\neq 0$. Ako se sjetimo Cramerova pravila, onda odmah slijedi da su SVA rješenja toga sustava jednaka nuli. Tojest, imamo

$$\overline{x_i}=0, \quad (\forall i) \implies x_i=0, \quad (\forall i).$$

Time je naš teorem u potpunosti dokazan. $\square$

Domaća zadaća. Pročitajte detaljno ostatak §9.5 u skripti [Primc].

Sada idemo na sljedeće poglavlje. Naglasimo kako u ostatku ovog današnjeg predavanja prvo ukratko ponavljamo neke stvari koje smo već apsolvirali. A nakon toga u biti samo uvodimo neke nove pojmove kako bismo materiju koju proučavamo mogli staviti u pogodan algebarski kontekst.

VAŽNO!!! Pojmove uvedene u niže danim Definicijama 1.5, 1.6, 1.7 i 1.8 treba usvojiti bez iznimke!!!

Predavanje završavamo Dodatkom, u kojemu dajemo tek definiciju (uz nekoliko kratkih komentara) jednog jako važnog matematičkog pojma: *Liejeve algebre*. Kažimo kako se Liejeve algebre koriste i u nekim dijelovima teorijske fizike, o čemu će neki od vas zasigurno nešto naučiti u nastavku studiranja, ili eventualno na poslijediplomskom studiju...

4. Algebra linearnih operatora

U ovom poglavlju nam je cilj vidjeti da ako je V vektorski prostor nad nekim poljem $\mathbb{F}$, onda skup $\mathcal{L}(V)$, svih linearnih operatora $f:V\to V$, ima strukturu tzv. *algebre*. Za početak, podsjetimo se nekih činjenica koje smo već naučili.

• **Vektorski prostor** $\mathcal{L}(V,W)$

Neka su V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori nad nekim poljem $\mathbb{F}$ (npr. $V=\mathbb{R}^n$ i $W=\mathbb{R}^m$). Definiramo

$$\mathcal{L}(V,W):=\text{skup svih linearnih operatora } A:V\to W.$$

Za dva lin. operatora $A,B\in\mathcal{L}(V,W)$ definiramo njihov **zbroj**

$$A+B:V\to W, \qquad (A+B)(v):=A(v)+B(v), \quad \forall v\in V.$$

Isto definiramo i operaciju **množenja skalarima** tako da za skalar $\lambda\in\mathbb{F}$ i lin. operator A kao gore stavimo

$$\lambda A:V\to W, \qquad (\lambda A)(v):=\lambda\cdot A(v).$$

(Gore smo s točkicom $\cdot$ označili skalarno množenje u prostoru W.)

Znamo da su tako definirana preslikavanja $A+B$ i λA također lin. operatori. Kao zaključak imamo:

$$\boxed{\mathcal{L}(V,W) \text{ je vektorski prostor nad } \mathbb{F}}$$

(Sve smo to vidjeli u *Linearnoj algebri 1*!)

Napomena. Ako su $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ i $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ baze od V i W, redom; onda za matrice gore definiranih lin. operatota $A+B$ i λA imamo:

$$A(\mathcal{F},\mathcal{E})+B(\mathcal{F},\mathcal{E})=(A+B)(\mathcal{F},\mathcal{E}),$$
$$(\lambda A)(\mathcal{F},\mathcal{E})=\lambda\, A(\mathcal{F},\mathcal{E}).$$

(Jasno, $A(\mathcal{F},\mathcal{E})$ i $B(\mathcal{F},\mathcal{E})$ su matrični prikazi operatora A i B, redom, u tom paru baza.)

Nadalje se sjetimo da smo definirali *matrice kanonske baze*:

$$E_{ij} := \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{c} j\text{-ti stupac} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{-ti redak} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Tojest, matrica E_{ij} ima na mjestu (i,j) broj $1=1_{\mathbb{F}}$ (jedinični element u polju $\mathbb{F}$), a na svim ostalim mjestima ima $0=0_{\mathbb{F}}$ (nula u polju $\mathbb{F}$).

Pokazali smo sljedeće:

Tvrdnja. (i) Skup matrica $\{E_{ij} \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ je baza od $M_{mn}(\mathbb{F})$.

(ii) Ako su V i W vektorski prostori, nad poljem $\mathbb{F}$, dimenzija $\dim V=n$ i $\dim W=m$, onda imamo izomorfizam

$$\mathcal{L}(V,W)\cong M_{mn}(\mathbb{F}).$$

I kao posljedicu toga imamo da je dimenzija

$$\dim\mathcal{L}(V,W)=\dim V\cdot\dim W=nm.$$

Podsjetimo se i sljedećih činjenica o množenju matrica.

(1) Ako su $A\in M_{km}(\mathbb{F})$ i $B\in M_{mn}(\mathbb{F})$, onda je $AB\in M_{kn}(\mathbb{F})$.
(2) Za odgovarajuće matrice A,B i C (koje se mogu množiti), te skalar $\lambda\in\mathbb{F}$ imamo:
- (asocijativnost) $A(BC)=(AB)C$;
- (distributivnost) $A(B+C)=AB+AC$ i $(A+B)C=AC+BC$;
- (kvaziasocijativnost) $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$.

4.1. Algebra $\mathcal{L}(V)$

Sada, neka su V, W i U vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, te neka su $B : V \to W$ i $A : W \to U$ lin. operatori. (Po tko zna koji put napominjem kako u biti nećemo ništa izgubiti u razumijevanju materije ukoliko uzmemo da nam je polje $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, polje realnih brojeva!!!) Definiramo *kompoziciju* tih operatora, kao novi (linearan!) operator

$$AB = A \circ B : V \to U.$$

Tako imamo preslikavanje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(W, U) &\longrightarrow \mathcal{L}(V, U), \\ (B, A) &\longmapsto AB = A \circ B. \end{aligned}$$

Napomena. (1) Kao i za matrice, tako i za lin. operatore vrijedi *bilinearnost* množenja:

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) &= \lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2, \\ (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B &= \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B. \end{aligned}$$

(2) Primijetimo: Za $V = W$ i operatore $A, B \in \mathcal{L}(V)$ imamo

$$AB \in \mathcal{L}(V).$$

Sada imamo ovu općenitu definiciju jedne važne algebarske strukture.

Definicija 1.5. Neka je $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \cdot)$ **algebra** nad $\mathbb{F}$, ili **$\mathbb{F}$-algebra**, ako postoji množenje

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad (A, B) \mapsto A \cdot B,$$

koje je **bilinearno**; tj., za svake $A, B, C \in \mathcal{A}$ i skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ imamo

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B) \cdot C &= \lambda(A \cdot C) + \mu(B \cdot C), \\ C \cdot (\lambda A + \mu B) &= \lambda(C \cdot A) + \mu(C \cdot B). \end{aligned}$$

Kažemo da je $\mathcal{A}$ **asocijativna algebra** ako je množenje u njoj asocijativno; tj., za bilo koje $A, B, C \in \mathcal{A}$ imamo da je

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

a ako to nije, kažemo da je $\mathcal{A}$ **neasocijativna** algebra.

Ako postoji element $1 = 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ takav da je $1_{\mathcal{A}} \cdot X = X \cdot 1_{\mathcal{A}} = X$, za svaki $X \in \mathcal{A}$, onda kažemo da je $1_{\mathcal{A}}$ **jedinica** algebre $\mathcal{A}$, te da je $\mathcal{A}$ **algebra s jedinicom**.

Konačno, kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ (bila ona asocijativna, ili ne) **komutativna** ako je

$$X \cdot Y = Y \cdot X, \quad \forall X, Y \in \mathcal{A};$$

a u suprotnom kažemo da je $\mathcal{A}$ **nekomutativna** algebra.

Sasvim evidentna posljedica svega što smo gore naveli je:

$$\boxed{\mathcal{L}(V) \text{ je asocijativna algebra s jedinicom } 1_{\mathcal{L}(V)} = \mathrm{id}_V}$$

Napomena. Dobro je primijetiti i to da je algebra $\mathcal{L}(V)$ nekomutativna ako i samo ako je $\dim V \geq 2$. (Zašto ?!)

Sasvim je jasno kako imamo i ovu važnu činjenicu:

$$\boxed{M_n(\mathbb{F}) \text{ je asocijativna algebra s jedinicom } I = I_n}$$

I ova je algebra nekomutativna ako i samo ako je $n \geq 2$; što nam je dobro znano.

Da bismo bolje razumijeli gornje dvije algebre, treba nam još jedna definicija.

Definicija 1.6. Ako su dane dvije $\mathbb{F}$-algebre $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \cdot)$ i $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \cdot)$, kažemo da je preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **homomorfizam algebri** ako je φ linearan operator za koji vrijedi

$$\varphi(X \cdot Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}.$$

Homomorfizam algebri $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ koji je i bijekcija zove se **izomorfizam** algebri.

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre s jedinicama $1_{\mathcal{A}}$ i $1_{\mathcal{B}}$, redom, onda kažemo da je homomorfizam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **homomorfizam algebri s jedinicom** ako je

$$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}.$$

Nadalje, kažemo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ **izomorfne** algebre (s jedinicom) ako postoji barem jedan izomorfizam algebri (s jedinicom) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. I u tom slučaju koristimo oznaku

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Znamo: Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, dimenzije $\dim V = n$, onda za bilo koju bazu $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ od V, preslikavanje

$$\varphi : \mathcal{L}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad A \mapsto A(\mathcal{E}),$$

je izomorfizam algebri. (Zašto?!) Dakle, tako vidimo da su naše dvije gore promatrane algebre izomorfne, tj., imamo da je

$$\boxed{\mathcal{L}(V) \cong M_n(\mathbb{F})}$$

Definicija 1.7. Asocijativna algebra s jedinicom $\mathcal{L}(V)$ zove se **linearna algebra** nad V. Isto tako, i $M_n(\mathbb{F})$ se zove **linearna algebra** $n \times n$ matrica nad $\mathbb{F}$.

Kada smo definirali pojam grupe, vidjeli smo kako je korisno i zanimljivo uvesti i pojam *podgrupe*. Zapravo, kad god imamo neku algebarsku strukturu (npr., grupu, prsten, algebru,...), uvijek je zanimljivo gledati njezine "podstrukture".

Definicija 1.8. Ako je $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \cdot)$ neka $\mathbb{F}$-algebra, kažemo da je $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ **podalgebra** od $\mathcal{A}$ ako je $\mathcal{A}_1$ vektorski potprostor od $\mathcal{A}$ takav da još vrijedi

$$X \cdot Y \in \mathcal{A}_1, \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}_1;$$

tj., $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1, \cdot)$ je također algebra. U tom slučaju koristimo oznaku

$$\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}.$$

Pogledajmo sada neke primjere algebri i njihovih podalgebri. (Za domaću zadaću napravite sve potrebne detalje kako biste dobro razumijeli navedene primjere.)

Primjer. (1) Definiramo $D_n(\mathbb{F})$ kao skup svih dijagonalnih matrica u $M_n(\mathbb{F})$; tj. matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tada je $D_n(\mathbb{F}) \leq M_n(\mathbb{F})$, (komutativna!) podalgebra; tzv. **podalgebra dijagonalnih matrica**.

(2) Označimo

$$T_n(\mathbb{F}) := \text{skup svih gornje/donje trokutastih matrica u } M_n(\mathbb{F}).$$

Tada je $T_n(\mathbb{F}) \leq M_n(\mathbb{F})$, (nekomutativna, ako je $n \geq 2$!) podalgebra; tzv. **podalgebra gornje/donje trokutastih matrica**.

(3) Na $M_n(\mathbb{F})$ definiramo tzv. **komutatorsko množenje**, ili kraće **komutator**,

$$[\cdot \mid \cdot] : M_n(\mathbb{F}) \times M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}),$$
$$(A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA.$$

Lako se provjeri sljedeće:

$$\big(M_n(\mathbb{F}), [\cdot \mid \cdot]\big) \text{ je } \mathbb{F}\text{-algebra.}$$

Napomena. Ako je $n \geq 2$ to NIJE asocijativna algebra! (Vidite zadatak dolje.)

Nadalje, ako posebno uzmemo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, onda vrijedi:

(Lie 1) Za svaku matricu $X \in M_n(\mathbb{F})$ je $[X, X] = 0$.
(Ekvivalentno; za sve matrice $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ je $[X, Y] + [Y, X] = 0$.)

(Lie 2) **(Jacobijev identitet)**
Za sve matrice $X, Y, Z \in M_n(\mathbb{F})$ imamo

$$\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0.$$

Dodatak: Liejeve algebre

Posebno, uz primjer (3) gore imamo ovu važnu definiciju još jedne fundamentalne algebarske strukture.

Definicija. Ako je $\mathbb{F}$-algebra $\mathfrak{L}$ takva da ona zadovoljava gornje uvjete (Lie 1) i (Lie 2), onda kažemo da je to **Liejeva algebra**.

Ako je podskup $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}$ takav da je $[A, B] \in \mathfrak{L}_1$, za sve $A, B \in \mathfrak{L}_1$, onda kažemo da je $\mathfrak{L}_1$ **(Liejeva) podalgebra** od $\mathfrak{L}$, i koristimo oznaku $\mathfrak{L}_1 \leq \mathfrak{L}$. (To je de facto gornja općenita definicija podalgebre, u kontekstu Liejevih algebri; kao specijalne vrste algebri.)

Napomena. Gornja oznaka “$\mathfrak{L}$” je veliko slovo “L” u njemačkom gotskom pismu. (Liejeve se algebre gotovo standardno označavaju, velikim i malim, slovima njemačke *gotice*; kao npr. $\mathfrak{L}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ (velika gotska slova L, G, H), ili pak $\mathfrak{l}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ (mala gotska slova l, g, h).

Naziv *Liejeva algebra* je u čast norveškog matematičara iz 19. stoljeća, koji se zvao *Sophus Lie*.

Kao direktnu posljedicu svega gore navedenog imamo ovu činjenicu:

$$\big(M_n(\mathbb{F}), [\cdot \mid \cdot]\big) \text{ je Liejeva } \mathbb{F}\text{-algebra.}$$

Ta se Liejeva algebra standardno označava s

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}),$$

i zove **opća linearna (Liejeva) algebra**.

Napomena. Liejeve su algebre jedni od glavnih primjera neasocijativnih algebri. (Za dokaz da posebno Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, kada je $n \geq 2$, NISU asocijativne, vidite dolje dan zadatak.)

Vrlo je instruktivno riješiti za domaću zadaću ovaj zadatak, koji govori o jednoj jednostavnoj, a u isto vrijeme jako važnoj Liejevoj algebri.

Zadatak. Definirali smo funkciju **trag** s $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$; tako da za $n \times n$ matricu $A = (a_{ij})$ stavimo

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Sada definiramo

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) := \{A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

(a) Pokažite: $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) \leq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, Liejeva algebra; to je tzv. **specijalna linearna (Liejeva) algebra**.

(b) Pokažite: dimenzija $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = n^2 - 1$.
(*Uputa.* Nađite neku bazu od $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, kao vektorskog prostora!)

(c) Pokažite: Skup

$$\left\{ \mathsf{e} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathsf{f} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{h} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

je baza Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$. Nadalje, izračunajte komutatore $[\mathsf{e}, \mathsf{f}]$, $[\mathsf{h}, \mathsf{e}]$ i $[\mathsf{h}, \mathsf{f}]$, a onda "dvostruke" komutatore $\big[[\mathsf{h}, \mathsf{e}], \mathsf{f}\big]$ i $\big[\mathsf{h}, [\mathsf{e}, \mathsf{f}]\big]$. Što zaključujete: Je li to asocijativna algebra ili ne?!

VAŽNO!!! Ukoliko to želite, preuzmite ovaj pdf materijal s ove mrežne stanice, jer će isti zasigurno nakon nekih dva do tri tjedna biti s iste uklonjen!!!