1. Svojstveni vektori i rješenja ODJ (Skripta [Primc, §11.3])

Napomena. Ovdje dani materijal ulazi u plan i program nastave predmeta Linearna algebra 2. No kako sadržaj u dobrom dijelu ulazi u područje matematičke analize isti se svake godine prezentira ovako, na jedan pregledan način, i bez popratnog rada u okviru vježbi. (Zapravo u ovom je materijalu daleko više napisano i objašnjeno negoli se to može napraviti u standardnom vidu nastave "na ploči"!)

S druge strane, budući je ta materija koja se tiče poznavanja metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi od velike važnosti za studijske programe na FO, ovdje je dana kako bi ju zainteresirani studenti u formi samostalnog učenja mogli usvojiti.

Možda je dobro napomenuti kako će moguće mnogim studentima ova materija biti malo teža za čitanje, budući se koriste neke stvari iz analize koje eventualno još nisu apsolvirane. (Neka vas to ne obeshrabri, jer ćete u najgoru ruku u sljedećoj akad. godini biti u stanju sve napisano dobro razumijeti.)

5.3. Svojstveni vektori i rješenja ODJ

Neka je $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. (Moguće da je $I = (-\infty, r)$ ili $I = (r, +\infty)$, za neki $r \in \mathbb{R}$, ili $I = \mathbb{R}$.)

Za funkciju $y : I \to \mathbb{R}$ standardno definiramo *derivaciju* od y kao funkciju

$$y' : I \to \mathbb{R}, \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} y(t);$$

jasno, ako ista uopće postoji. Isto tako, za $k \in \mathbb{N}$ induktivno definiramo *k-tu derivaciju* kao funkciju

$$y^{(k)} : I \to \mathbb{R}, \quad y^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} y^{(k-1)}(t);$$

i ovaj put, ove tzv. više derivacije mogu, ali ne moraju, postojati. Kažimo kako se više derivacije, za malene k-ove, označavaju s y', y'', y''', itd.

Budući je to potrebno za ono što slijedi, kažimo par riječi i o derivacijama kompleksnih funkcija. Pretpostavimo sada da imamo kompleksnu funkciju $y : I \to \mathbb{C}$. Nju možemo zapisati u obliku

$$y(t) = u(t) + \imath v(t),$$

gdje su $u, v : I \to \mathbb{R}$, realne funkcije. Sada se, potpuno isto kao i za realne funkcije, definira pojam derivacije:

$$y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} y(t) = u'(t) + \imath v'(t);$$

i isto više derivacije s

$$y^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + \imath v^{(k)}(t), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Sada promatrajmo polje $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, i onda definirajmo skup k **puta diferencijabilnih funkcija**, ili skup funkcija **klase** $\mathcal{C}^k$, s

$$\mathcal{C}^k(I) := \{\varphi : I \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ ima } k\text{-tu derivaciju i } \varphi^{(k)} \text{ je neprekidna funkcija}\}.$$

Teorem 1.1. *$\mathcal{C}^k(I)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$; i on je beskonačno dimenzionalan.*

Dokaz. Ako su dane funkcije $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^k(I)$ i broj $b \in \mathbb{K}$, onda je

$$(\varphi + \psi)^{(k)} = \varphi^{(k)} + \psi^{(k)} \quad \text{i} \quad (b\varphi)^{(k)} = b\,\varphi^{(k)}.$$

Odavde je jasno da je $\mathcal{C}^k(I)$ vektorski prostor.

Dokaz da se radi o beskonačno dimenzionalnom prostoru dat ćemo uz pretpostavku da interval I sadrži 0; što će nam pojednostavniti dokaz. (Općeniti se slučaj lako pokaže korištenjem tzv. Vandermondeove determinante!)

Dakle, pogledajmo sve polinome-monome $m_j \in \mathbb{K}[t]$, definirane s $m_j(t) := t^j$, za $j \in \mathbb{N}_0$; primijetimo da je $m_0(t) = 1$. Jasno je da su ti polinomi, kada ih restringiramo na I, iz $\mathcal{C}^k(I)$; jer je zapravo, imajući na umu da govorimo o restrikcijama m_j na I, skup svih polinoma $\mathbb{K}[t] \subseteq \mathcal{C}^k(I)$. (Štoviše, svaki je polinom, ili bolje rečeno njegova restrikcija na I, beskonačno puta derivabilna funkcija.) Sada pokažimo da je skup $\{m_0, m_1, \ldots, m_N\}$, za bilo koji $N \in \mathbb{N}$, linearno nezavisan skup funkcija. U tu svrhu pretpostavimo da za neke skalare $b_j \in \mathbb{K}$ imamo

$$P(t) := \sum_{j=0}^{N} b_j m_j(t) = \sum_{j=0}^{N} b_j t^j = \mathbf{0};$$

ovdje je s $\mathbf{0}$ označen nul-polinom, tj. nul-funkcija u $\mathcal{C}^k(I)$. Ako u gornjoj jednakosti stavimo $t = 0$, odmah vidimo da je $0 = \mathbf{0}(0) = P(0) = b_0$. Zatim deriviranjem polinoma $P(t)$, i onda ponovo uvrštavanjem $t = 0$, dobivamo

$$P'(t) = \sum_{j=1}^{N} j b_j t^{j-1} \quad \Rightarrow \quad P'(0) = 1 \cdot b_1 = b_1 = 0.$$

Ako pak računamo k-tu derivaciju polinoma $P(t)$, uvrštavanjem $t = 0$ dobivamo

$$P^{(k)}(0) = k! b_k = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = 0.$$

Tako je jasno da su svi $b_j = 0$, što smo i morali vidjeti. □

Sada definiramo objekte koje ovdje želimo promatrati; a zatim ćemo formulirati problem koji nas ovdje zanima, da bismo kasnije naveli i teorem koji govori o njegovom rješenju.

Definicija 1.2. Obična diferencijalna jednadžba (ODJ) oblika

$$y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = f(t),$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ zadana neprekidna funkcija i $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ su zadani koeficijenti, zove se **linearna ODJ n-tog reda s konstantnim koeficijentima**.

Ako je $f(t) = 0$, tj. f je nul-funkcija, kažemo da je ta ODJ **homogena**.

Problem 1.3. Riješiti homogenu ODJ

$$y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0; \qquad (\star)$$

tj., naći **sve** funkcije $y = y(t) \in \mathcal{C}^k(I)$ koje zadovoljavaju $(\star)$.

Vezano uz navedeni Problem, kažimo kako nas prvenstveno zanimaju realna rješenja promatrane ODJ; tj., one funkcije $y : I \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju $(\star)$. Ali isto tako, s ciljem nalaženja realnih rješenja, zanimat će nas i (kompleksne) funkcije $y : I \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju $(\star)$; tj., gledat ćemo i kompleksna rješenja dane ODJ.

Korisno je imati na umu i sljedeću važnu činjenicu; koju, iako je zapravo evidentna, navodimo u formi teorema. (Dokaz je sasvim jednostavan. Samo treba staviti $y = u + \imath v$ u jednadžbu $(\star)$, i onda odvojiti realne dijelove posebno, a imaginarne dijelove posebno.)

Teorem 1.4. *Pretpostavimo da je funkcija $y : I \to \mathbb{C}$ dana kao $y(t) = u(t) + \imath v(t)$, gdje su funkcije $u, v : I \to \mathbb{R}$, kompleksno rješenje ODJ $(\star)$. Tada su u i v realna rješenja ODJ $(\star)$.*

Pogledajmo sada dva jednostavnija konkretna primjera.

Primjer 1.5. (1) *Linearna homogena ODJ prvog reda* je oblika

$$y' + c_0 y = 0. \qquad (\dagger)$$

Znajući da je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(e^{rt}) = (e^{rt})' = re^{rt}$, potražimo rješenje dane ODJ u obliku $y(t) = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$. Tada je $y'(t) = re^{rt}$; i onda $(\dagger)$ postaje

$$re^{rt} + c_0 e^{rt} = (r + c_0)e^{rt} = 0.$$

Odavde, jer je $e^{rt} \neq 0$ za sve realne brojeve r i t, imamo da je $r = -c_0$. Znači;

$$y(t) = e^{-c_0 t}.$$

(2) *Linearna homogena ODJ drugog reda* je oblika

$$y'' + c_1 y' + c_0 y = 0. \qquad (\dagger\dagger)$$

Ako sada stavimo $y = y(t) = e^{zt}$, onda imamo $y' = ze^{zt}$ i $y'' = z^2 e^{zt}$. Slijedi da je

$$z^2 e^{zt} + c_1 z e^{zt} + c_0 e^{zt} = (z^2 + c_1 z + c_0)e^{zt} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + c_1 z + c_0 = 0 \qquad (\clubsuit)$$

• Ako kvadratna jednadžba $(\clubsuit)$ ima rješenja $z = r_{1,2} \in \mathbb{R}$ takva da je $r_1 \neq r_2$, onda je jasno da su $y_1 = e^{r_1 t}$ i $y_2 = e^{r_2 t}$ dva rješenja od $(\dagger\dagger)$. Lako se provjeri da su te dvije funkcije, kao vektori u $\mathcal{C}^k(I)$, za bilo koji k, linearno nezavisne. Nadalje, svako se drugo rješenje ODJ $(\dagger\dagger)$ može napisati u obliku

$$y = y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

za neke konstante $A, B \in \mathbb{R}$. (Naglasimo kako posljednja činjenica nije evidentna. Mi ćemo kasnije navesti teorem koji rečeno osigurava, i to u općenitijoj formi. Jasno, o dokazu neće biti riječi u okviru predmeta *Linearna algebra 2*!)

• Ako je $z = r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$, onda su funkcije $y_1 = e^{rt}$ i $y_2 = te^{rt}$ dva rješenja od $(\dagger\dagger)$; za y_1 to je jasno, a za y_2 lako se provjeri. Isto tako, lako se provjeri da su te dvije funkcije linearno nezavisne, te da se svako drugo rješenje ODJ $(\dagger\dagger)$ može napisati u obliku

$$y = y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt} = (A + Bt)e^{rt},$$

za neke konstante $A, B \in \mathbb{R}$.

• Ako je diskriminanta $D = c_1^2 - 4c_0$ kvadratne jednadžbe $(\clubsuit)$ negativna, tj. $D < 0$, onda ta jednadžba ima rješenja

$$z_{1,2} = -\frac{c_1}{2} \pm \imath \frac{\sqrt{-D}}{2} = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C},$$

gdje smo stavili $\alpha = -c_1/2$ i $\beta = \sqrt{-D}/2$. I ovaj se puta lako provjeri da su sada funkcije $y_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t$ i $y_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$ dva rješenja od (††), te da su one linearno nezavisne. Nadalje, svako se drugo rješenje od (††) dobije kao

$$y = y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t),$$

za neke konstante $A, B \in \mathbb{R}$.

Sljedeći je pojam jako važan u teoriji diferencijalnih jednadžbi.

Definicija 1.6. Za ODJ ($\star$) definiramo **karakterističnu** (algebarsku) **jednadžbu**

$$k(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (K)$$

Sada; prije negoli formuliramo spomenuti teorem, i neke njegove važne posljedice, napravit ćemo malu pripremu o nultočkama polinoma.

Definicija 1.7. Ako je polinom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ stupnja $\deg(p) \geq 1$, kažemo da je $z \in \mathbb{C}$ njegova nultočka ako je $p(z) = 0$.

Kažimo kako u skupu (tj. prstenu) prstenu polinoma $\mathbb{K}[x]$, gdje je polje $\mathbb{K}$ jednako ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, kažemo da neki polinom $f(x)$ dijeli neki drugi polinom $g(X)$ ako postoji neki polinom $q(x)$ takav da je $g(x) = f(x)q(x)$; i tu činjenicu označavamo s $f(x)|g(x)$. Ako pak polinom $f(x)$ **ne** dijeli polinom $g(x)$, to označavamo s $f(x) \not| g(x)$.

Napomena 1.8. Po tzv. *Bezoutovom teoremu* znamo: Broj $z \in \mathbb{C}$ je nultočka polinoma $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ako i samo ako linearni polinom $x - z$ dijeli polinom $p(x)$, u prstenu polinoma $\mathbb{C}[x]$; tj., ako i samo ako postoji polinom $p_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ takav da je $p(x) = (x - z)p_1(x)$.

Definicija 1.9. Kažemo da je $z \in \mathbb{C}$ *nultočka kratnosti* $m \in \mathbb{N}$ ako je z nultočka i vrijedi:

$$(x - z)^m | p(x) \quad \text{i} \quad (x - z)^{m+1} \not| p(x).$$

Primjer 1.10. Naprimjer, polinom $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ ima $z = 1$ kao nultočku kratnosti $m = 3$; jer je $p(x) = (x - 1)^3(x + 2)$.

Sljedeća lema daje jednostavan kriterij za računanje kratnosti neke nultočke zadanog polinoma.

Lema 1.11. *Polinom* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *ima* $z \in \mathbb{C}$ *kao nultočku kratnosti* $m \in \mathbb{N}$ *ako i samo ako vrijedi:*

$$p(z) = p'(z) = \cdots = p^{(m-1)}(z) = 0 \quad i \quad p^{(m)}(z) \neq 0.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je z nultočka kratnosti $m \in \mathbb{N}$, znači da je $p(x) = (x - z)^m\phi(x)$, za neki polinom $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$. Sada primijetimo kako je $\phi(z) \neq 0$; jer bi inače, ponovo po Bezoutovom teoremu, bilo $\phi(x) = (x - z)\psi(x)$, za neki polinom $\psi(x) \in \mathbb{C}[x]$, što je nemoguće. Onda, deriviranjem imamo

$$p'(x) = m(x - z)^{m-1}\phi(x) + (x - z)^m\phi'(x) = (x - z)^{m-1}\phi_1(x),$$

gdje smo stavili

$$\phi_1(x) = \big(m\phi(x) + (x - z)\phi'(x)\big).$$

Još primijetimo da je $\phi_1(z) = m\phi(z) \neq 0$.

Dalje; analogno kao gore, imamo da je $p''(x) = (x-z)^{m-2}\phi_2(x)$, gdje je $\phi_2(x)$ konkretan polinom (napišite ga!) takav da je $\phi_2(z) \neq 0$. Korak po korak, indukcijom dobivamo da je $p^{(m-1)}(x) = (x-z)\phi_{m-1}(x)$, gdje je $\phi_{m-1}(x)$ konkretan polinom takav da je $\phi_{m-1}(z) \neq 0$. I konačno; imamo da je $p^{(m)}(x) = \phi_{m-1}(x) + (x-z)\phi'_{m-1}(x)$. Iz svega navedenog je jasno da je

$$p(z) = p'(z) = \cdots = p^{(m-1)}(z) = 0 \quad \& \quad p^{(m)}(z) = \phi_{m-1}(z) \neq 0.$$

Implikaciju ($\Leftarrow$) pokažite za domaću zadaću. □

Sada navedimo, bez dokaza, najavljeni osnovni teorem koji govori o skupu rješenja ODJ ($\star$).

Teorem 1.12. *Skup $\mathcal{S}$, svih rješenja homogene linearne ODJ n-tog stupnja s konstantnim koeficijentima je n-dimenzionalan potprostor (realnog) vektorskog prostora $\mathcal{C}^n(I)$.*

Dobro je ovdje primijetiti kako je jednostavno vidjeti da je skup $\mathcal{S}$, iz teorema, vektorski potprostor od $\mathcal{C}^n(I)$. (Pokažite to!) Dio teorema koji je netrivijalan je činjenica da se radi baš o prostoru dimenzije n.

Gornji teorem govori nam kako pristupiti traženju svih rješenja ODJ ($\star$). Naime, dovoljno je naći nekih konkretnih n linearno nezavisnih funkcija $y_1, \ldots, y_n$ koje su rješenja od ($\star$); i onda je svako drugo rješenje dano kao neka linearna kombinacija tih y_i-ova. Primijetimo ovdje kako će onda skup $\mathcal{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ biti baza vektorskog prostora $\mathcal{S}$. Kažimo više detalja o algoritmu za nalaženje neke takve baze $\mathcal{B}$. Za početak, imamo ovaj tehnički rezultat.

Propozicija 1.13. *Pretpostavimo da je $z \in \mathbb{C}$ nultočka karakteristične jednadžbe $k(x)$, kratnosti $K \in \mathbb{N}$. Tada su funkcije*

$$y_0(t) = e^{zt}, y_1(t) = te^{zt}, \ldots, y_{K-1}(t) = t^{K-1}e^{zt}$$

(kompleksna) rješenja ODJ ($\star$).

Skica dokaza. Neka je $0 \leq \ell \leq K-1$. Uz “malo posla” može se pokazati da je

$$y_\ell^{(n)} + c_{n-1}y_\ell^{(n-1)} + \cdots + c_1 y'_\ell + c_0 y_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{\ell - i} k^{(i)}(z) y_{\ell-i}.$$

Odavde odmah slijedi da je y_ℓ rješenje ODJ ($\star$). □

Sljedeći korolar precizno opisuje jednu bazu $\mathcal{B}$ vektorskog prostora $\mathcal{S}$, skupa svih rješenja ODJ ($\star$); vidite i Napomenu 1.15, za neke komentare o dokazu korolara. Pritom se podsjetimo na sljedeće dobro poznate činjenice: *Ako je dan polinom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, i ako je $z \in \mathbb{C}$ neka njegova nultočka, onda je i konjugat $\overline{z}$ također nultočka od $p(x)$. Pritom je z kratnosti K ako i samo ako je $\overline{z}$ kratnosti K.* (Pokažite to!) Nadalje, podsjetimo se i na ovo: Ako je $z = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C}$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda za eksponencijalnu funkciju imamo

$$e^z = e^{\alpha + \imath\beta} = e^\alpha e^{\imath\beta} = e^\alpha(\cos\beta + \imath \sin\beta).$$

Korolar 1.14. *Neka je skup svih nultočaka karakteristične jednadžbe $k(x)$ dan s*

$$\mathcal{N}(k) = \{r_1, \ldots, r_p\} \cup \{z_1, \overline{z_1} \ldots, z_q, \overline{z_q}\},$$

gdje su $r_j \in \mathbb{R}$ (realne) nultočke kratnosti $K_j \in \mathbb{N}$ i $z_j = \alpha_j + \imath\beta_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ su (prave kompleksne) nultočke kratnosti $L_j \in \mathbb{N}$. Definirajmo realne funkcije $y_{\ell j} : I \to \mathbb{R}$ s

$$y_{\ell j}(t) = t^j e^{r_\ell t}, \quad 1 \le \ell \le p \ \ \& \ \ 0 \le j < K_l;$$

i realne funkcije $\chi^{1,2}_{\ell j} : I \to \mathbb{R}$ kao realni/imaginarni dio funkcije $t \mapsto t^j e^{z_\ell t}$, tj.

$$\chi^1_{\ell j}(t) = t^j e^{\alpha_\ell t}\cos(\beta_\ell t), \quad \chi^2_{\ell j}(t) = t^j e^{\alpha_\ell t}\sin(\beta_\ell t), \qquad 1 \le \ell \le q \ \ \& \ \ 0 \le j < L_l.$$

Tada je skup svih gore definiranih funkcija,

$$\mathcal{B} = \{y_{\ell j}(t)\} \cup \{\chi^1_{\ell j}(t), \chi^2_{\ell j}(t)\},$$

baza prostora $\mathcal{S}$.

Napomena 1.15. Koristeći iste oznake kao u korolaru, primijetimo da je

$$(K_1 + \cdots + K_p) + (2L_1 + \cdots + 2L_q) = n;$$

jer za svaku nultočku r_ℓ imamo K_ℓ funkcija $y_{\ell j}(t)$, i za svaki par nultočaka $\{z_\ell, \overline{z_\ell}\}$ imamo $2L_\ell$ funkcija, $\chi^1_{\ell j}(t)$ i $\chi^2_{\ell j}(t)$. Zato doista skup $\mathcal{B}$ sadrži n funkcija. Nadalje, kao posljedicu Propozicije 1.13 i Teorema 1.4, vidimo da doista sve funkcije u skupu $\mathcal{B}$ jesu rješenja ODJ $(\star)$.

U dokazu gornjeg korolara jedina netrivijalna stvar je pokazati da, za bilo koji (otvoren) interval $I \subseteq \mathbb{R}$, skup svih funkcija u $\mathcal{B}$ jest linearno nezavisan. Naime, tada će, imajući na umu Teorem 1.12, slijediti da $\mathcal{B}$ doista jest baza prostora $\mathcal{S}$, skupa svih rješenja ODJ $(\star)$. (Primijetimo kako smo mi u dokazu Teorema 1.1 zapravo pokazali kako je skup funkcija $\{e^{zt}, te^{zt}, \ldots, t^N e^{zt}\}$ linearno nezavisan u **realnom** vektorskom prostoru $\mathcal{C}^k(I)$, svih kompleksnih k-puta derivabilnih funkcija $y : I \to \mathbb{C}$; ovdje je $z \in \mathbb{C}$ neka nultočka karakteristične jednadžbe $k(x)$, a $N \in \mathbb{N}$ je proizvoljan. To daje neki 'osjećaj' o, ne 'dubokom', ali 'tehnički petljavom' dokazu spomenute linearne nezavisnosti funkcija iz $\mathcal{B}$; kada radimo u punoj općenitosti.

Evo za vježbu jedan zadatak koji se može bez velike muke riješiti pomoću gore opisane procedure (da ne kažem "kuharice").

Zadatak. Riješite ODJ

$$y^{(4)}(t) - 2y'''(t) + 5y''(t) - 8y'(t) + 4y(t) = 0.$$

(*Uputa.* Vrijednost 1 je nultočka karakterističnog polinoma $k(x)$. Koje kratnosti?)

Kao motivaciju za ono što slijedi pogledajmo sada jedan primjer iz fizike. Može se pokazati da je *jedno-dimenzionalan harmonijski oscilator*, frekvencije $\omega > 0$, opisan funkcijom $x = x(t)$ definiranom na nekom realnom intervalu (tj., intervalu vremena u kojem promatramo oscilator) kao rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\heartsuit)$$

(Prvi je standardni fizikalni, kako je to bilo često označavano još od vremena Newtona, zapis diferencijalnih jednadžbi; a drugi je zapis onaj koji je uobičajeniji u matematičkom pisanju. Primijetite kako mi ovdje u potpunosti ovdje "ignoriramo" fizikalnu interpretaciju, i ne vodimo računa o fizikalnim mjernim jedinicama.)

Sada definirajmo pomoćne funkcije

$$y_1(t) = x(t) \quad \text{i} \quad y_2(t) = x'(t).$$

Tada je

$$y_1'(t) = x'(t) = y_2(t) \quad \text{i} \quad y_2'(t) = x''(t) = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 y_1(t).$$

Tojest, imamo sustav diferencijalnih jednadžbi u $y_i = y_i(t)$:

$$\begin{cases} y_1' = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \\ y_2' = -\omega^2 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \end{cases} \qquad (\bullet)$$

Ako definiramo matricu $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ i funkciju $y(t)$ kao jedno-stupčani vektor $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, onda se sustav $(\bullet)$ može zapisati kao

$$y'(t) = A\, y(t).$$

Na taj smo način ODJ (drugog reda) $(\heartsuit)$ sveli na sustav dvije ODJ (prvog reda) u nepoznatim funkcijama y_1 i y_2. Da je tomu tako, imajući na umu gornji konkretan primjer, pokazat će sljedeća propozicija.

Propozicija 1.16.

(i) *Neka je matrica* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *i neke je* $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. *Onda se rješavanje sustava* $y' = Ay$ *svodi na rješavanje linearne ODJ drugog reda s konstantnim koeficijentima*

$$\varphi'' - \operatorname{tr}(A)\, \varphi' + \det(A)\, \varphi = 0. \qquad (\triangle)$$

Preciznije rečeno, y_1 *i* y_2 *su rješenja ODJ* $(\triangle)$.

(ii) *Neka je dana linearna ODJ drugog reda s konstantnim koeficijentima*

$$\varphi'' - s\varphi' + d\varphi = 0, \quad s, d \in \mathbb{R}.$$

Supstitucijom $y_1 = \varphi(t)$ *i* $y_2 = \varphi'(t)$ *dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = sy_2 - dy_1 \end{cases}$$

Dokaz. (i) Očito je

$$y' = Ay \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

I onda računamo:

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_{11}y_1' + a_{12}y_2' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) \\ &= a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}(a_{12}y_2) \\ &= a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}(y_1' - a_{11}y_1) \\ &= (a_{11} + a_{22})y_1' - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 \\ &= \operatorname{tr}(A)\, y_1' - \det(A)\, y_1. \end{aligned}$$

Znači, y_1 je rješenje ODJ $(\triangle)$. Sasvim isto vidimo i da je y_1 rješenje ODJ $(\triangle)$. (Pokažite to!)

(ii) To je očito. (Uvjerite se!) $\square$

Napomena 1.17. (1) Primijetimo: Ako $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zadovoljava sustav $y' = A\, y$, onda su funkcije y_1 i y_2 iz $\mathcal{C}^2(I)$, za neki pogodan otvoren interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

$\big[\big[$ Doista, y_1 i y_2 su derivabilne, pa postoje derivacije y_1' i y_2'; iz čega posebno slijedi da su y_1 i y_2 neprekidne. (Jer znamo iz Analize da je svaka derivabilna funkcija posebno i neprekidna!) Ali kako je posebno

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \qquad\qquad (\spadesuit)$$

tj. y_1' je linearna kombinacija neprekidnih funkcija, to je i y_1' neprekidna funkcija. Analogno, i y_2' je neprekidna funkcija. Tako smo pokazali: $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1(I)$.

Dalje, deriviranjem ($\spadesuit$) odmah slijedi i da postoji druga derivacija $y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2'$; i ona je neprekidna, kao linearna kombinacija neprekidnih funkcija. Tako imamo da je $y_1 \in \mathcal{C}^2(I)$. Jasno, sasvim analogno imamo i da je $y_2 \in \mathcal{C}^2(I)$.$\big]\big]$

(2) Primijetimo: Za matricu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ dobijemo za ($\triangle$) upravo ODJ $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, jedno-dimenzionalni oscilator.

(3) Za sustav $y' = y$, tj. kada imamo da je matrica $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jedinična, onda ODJ ($\triangle$) postaje

$$\varphi'' - 2\varphi' + \varphi = 0.$$

Ta ODJ ima kao (linearno nezavisna!) rješenja:

$$\varphi_1(t) = e^t, \qquad \varphi_2(t) = te^t.$$

S druge strne, sustav $y' = y \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$ ima rješenja:

$$y_1 = Ce^t, \qquad y_2 = De^t, \quad \text{za neke } c, D \in \mathbb{R}.$$

Zaključak: Znači, općenito skupovi rješenja $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ i $\{y_1, y_2\}$ NISU jednaki.

Za vježbu možete napraviti sljedeći zadatak.

Zadatak. Riješite sustav ODJ $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2y_2 - y_1 \end{cases}$

(*Uputa.* Dobije se da su y_i-ovi lin. kombinacije funkcija e^t i te^t.)

Sada gledajmo još generalniju situaciju. Neka je matrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Neka je

$$y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)$$

n-torka derivabilnih funkcija $y_i : I \to \mathbb{R}$. Neka je

$$F(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$$

n-torka neprekidnih funkcija $f_i : I \to \mathbb{R}$. Sustav ODJ

$$y'(t) = A\,y(t) + F(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases}$$

zove se **linearan sustav ODJ prvog reda s konstantnim koeficijentima**. Ako je funkcija $F(t) = (0, \ldots, 0)$, kažemo da je taj sustav **homogen**.

Nadalje ako za neki $t_0 \in I$ i neku n-torku $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vrijedi tzv. **početni uvjet**

$$y(t_0) = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad y_1(t_0) = b_1, \ldots, y_n(t_0) = b_n,$$

onda to zapisujemo kao:

$$\begin{cases} y'(t) = A\,y(t) + F(t) & \cdots \quad \text{(diferencijalna jednadžba)} \\ y(t_0) = \boldsymbol{b} & \cdots \quad \text{(početni uvjet)} \end{cases}$$

Sada se problem rješavanja gornje ODJ, uz dani početni uvjet, zove **Cauchyjev problem**.

Rješavanje ODJ dane kao gore rješava se u dva koraka. Prvi je korak riješiti pripadni homogeni sustav diferencijalnih jednadžbi

$$y' = A\,y.$$

Kada se to napravi, onda se u drugom koraku (raznim metodama) pokušava naći tzv. *partikularno rješenje* dane ODJ. Kada se sve to napravi (što u praksi može biti vrlo komplicirano), onda je nalaženje rješenja Cauchyjevog problema obično jednostavan posao. Nama je ovdje cilj samo još reći par stvari u vezi sa spomenutim prvim korakom. Sljedeći je teorem jednostavna, ali vrlo korisna, opservacija koja pokazuje kako sve ovo ima veze s Linearnom algebrom.

Teorem 1.18. *Skup svih rješenja homogenog linearnog sustava ODJ $y' = A\,y$ je vektorski prostor.*

Dokaz. Za dva rješenja toga sustava y_1 i y_2, te dva skalara $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, koristeći *linearnost derivacije*, imamo

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2';$$

i isto tako, koristeći *linearnost množenja matrica*, imamo

$$A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A y_1 + \lambda_2 A y_2.$$

Slijedi:

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' = (\text{jer je } y_j' = A y_j) = A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2).$$

To pokazuje da je i funkcija $y_0 := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ doista rješenje promatranog homogenog sustava; i teorem je dokazan. $\square$

Pretpostavimo sada da matrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ima svojstvenu vrijednost $\lambda \in \mathbb{R}$. I neka je od nul-vektora različit vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ svojstven za tu svojstvenu vrijednost λ; tj., imamo da je

$$Av = \lambda v.$$

Onda definirajmo funkciju (tj., n-torku realnih funkcija!)

$$y = y(t) := e^{\lambda t} v.$$

Tada se lako računa:

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}(Av) = A(e^{\lambda t} v) = Ay(t).$$

Tojest, vidimo da je funkcija $y(t)$ rješenje sustava ODJ $y'(t) = Ay(t)$.

Još općenitije; sada pretpostavimo da imamo matricu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ takvu da se ona može dijagonalizirati. Tojest, postoje neki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (ne nužno međusobno različiti), te da postoji (uređena) baza $(v_1, \ldots, v_n)$ od $\mathbb{R}^n$ tako da je

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n.$$

Onda definirajmo n vektora (tj., funkcija!)

$$y_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tu je bitno primijetiti:

!!! *Funkcije* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *su linearno nezavisne.*

(Naime, iz $\sum_i \alpha_i y_i = \sum_i \alpha_i e^{\lambda_i t} v_n = \mathbf{0}$ slijedi da su svi $\alpha_i e^{\lambda_i t} = 0$; i onda su svi $\alpha_i = 0$.)

Jasno, svaka linearna kombinacija

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n, \quad C_i \in \mathbb{R},$$

je rješenje sustava $y' = Ay$.

Ukoliko je dan Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y' = A\,y \\ y(t_0) = \boldsymbol{b} = \sum_i b_i v_i \end{cases}$$

onda tražimo C_i-ove takve da je

$$y(t_0) = C_1 e^{\lambda_1 t_0} v_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t_0} v_n = \boldsymbol{b} = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n;$$

iz čega slijedi da je nužno $C_i e^{\lambda_i t_0} = b_i$, i konačno

$$C_i = b_i / e^{\lambda_i t_0} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

!!! Primijetimo: Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje.