JMBAG: ______________ IME I PREZIME: ______________________

Linearna algebra 2 - 1. kolokvij

27.04.2021.

(10) 1. Neka je $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ kanonska baza od $\mathbb{R}^3$ i neka je dana baza $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ od $\mathbb{R}^3$, gdje su vektori b_i definirani s $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (0, 1, -1)$ i $b_3 = (1, 1, -1)$. Definiramo linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na bazi $\mathcal{E}$ ovako:

$$Ae_1 = 3e_1 - b_1, \quad Ae_2 = b_1 + 2e_2 - 3b_2, \quad Ae_3 = b_3.$$

Nađite matricu operatora A u bazi $\mathcal{E}$, matricu operatora A u bazi $\mathcal{B}$ i matricu operatora prijelaza T iz baze $\mathcal{B}$ u bazu $\mathcal{E}$.

(10) 2. Neka su matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Pronađite sve moguće produkte gornjih matrica takve da je taj produkt kvadratna matrica; te sve tako dobivene kvadratne matrice izračunajte. U svakom takvom produktu su matrice A_i, koje ga određuju, nužno međusobno različite.

(ii) Za svaku kvadratnu matricu dobivenu u (i) utvrdite je li ona invertibilna, pa ako jest odredite njoj inverznu matricu.

(10) 3. Neka su dane matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$. Postoje li neki λ i neka matrica W s realnim koeficijentima tako da je ABW jednako 3×3 matrici koja na svakom mjestu ima broj 4. Ako da, odredite sve takve realne brojeve λ i matrice W.

(10) 4. (i) Izračunajte determinantu matrice $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Postoje li prirodan broj k i matrica $M \in M_3(\mathbb{R})$ takvi da vrijedi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Omega^2$? Ako da, pronađite neki takav k i neku matricu M.

(ii) Ako je V realan konačno dimenzionalan vektorski prostor, precizno objasnite kako se definira determinanta linearnog operatora $f : V \to V$. Nadalje, pokažite da je funkcija $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ invarijanta.

(10) 5. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih matrica oblika $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x & 0 \\ b & 0 & y \end{pmatrix}$, gdje su matrični koeficijenti $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $xy \in \{-1, 1\}$. Je li $\mathcal{S}$ podgrupa grupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$? Ako jest, posebno izračunajte inverz matrice A, dane kao gore. Nadalje, utvrdite je li množenje matrica u $\mathcal{S}$ komutativno. (Ako nije, nađite neke dvije konkretne matrice koje ne komutiraju!)

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!