

## Linearna algebra 2 - 1. kolokvij

06.05.2022.

- (10) 1. Neka je  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  kanonska baza od  $\mathbb{R}^3$  i neka je dana baza  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  od  $\mathbb{R}^3$ , gdje su vektori  $b_i$  definirani s  $b_1 = (1, -2, 0)$ ,  $b_2 = (0, 1, 1)$  i  $b_3 = (1, -1, 0)$ . Definiramo linearni operator  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  na bazi  $\mathcal{B}$  na sljedeći način:

$$Ab_1 = e_2, \quad Ab_2 = e_3, \quad Ab_3 = e_1.$$

Nađite matricu operatora  $A$  u bazi  $\mathcal{E}$ . Zatim odredite je li  $A$  regularan operator.

- (10) 2. Neka su dane matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ . Postoje li  $a \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$  takvi da je istovremeno  $\det(B^{-1}A^n) = 1$  i  $\det(A^2 - 4I) = 0$ ? Ako postoje, odredite sve takve  $a$  i  $n$ .

- (10) 3. Neka su dane matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  i  $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ , gdje je

$\lambda \in \mathbb{R}$  parametar. Napišite koji su sve mogući produkti od tih matrica tako da svaku od dane tri matrice u produktu napišemo najviše jednom, a da je dobiveni produkt kvadratna matrica. Postoji li neki  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da je trag svake dobivene produktne matrice jednak 5? Ako da, odredite taj  $\lambda$ .

- (10) 4. Neka su matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} -7/2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & x \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , gdje je  $x \in \mathbb{R}$ . Odredite sve  $x$  takve da je rang produkta te dvije matrice najmanji mogući.

- (10) 5. Neka je  $E$  skup svih matrica oblika  $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & a & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$ , gdje su skalari  $x, y, a \in \mathbb{R}$  takvi da je  $a \neq 0$  i  $|x| \neq |y|$ . Je li  $E$  podgrupa grupe  $GL_3(\mathbb{R})$ ? Ako da, posebno izračunajte inverz matrice  $A$ , dane kao gore. Je li množenje matrica u  $E$  komutativno? (Ako nije, nađite neke dvije konkretne matrice koje ne komutiraju!)

**Napomena.** Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!