

Linearna algebra 2 - 1. kolokvij 28.04.2023.

- (10) 1. Neka je $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ kanonska baza od \mathbb{R}^3 i neka je dana baza $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ od \mathbb{R}^3 , gdje su vektori b_i definirani s $b_1 = (1, 2, -1)$, $b_2 = (0, 1, 1)$ i $b_3 = (1, 0, -2)$. Definiramo linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na bazi \mathcal{B} na sljedeći način:

$$A(b_1) = b_1 - b_2, \quad A(b_2) = b_3, \quad A(b_3) = 2b_1.$$

Odredite matricu prijelaza iz baze \mathcal{E} u bazu \mathcal{B} . Zatim nađite matricu operatora A u bazi \mathcal{E} .

- (10) 2. Zadane su matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, gdje je $x \in \mathbb{R}$.

Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje matrica AB nije regularna i istodobno vrijedi $\det(BA)^4 = \det(BC)$, ukoliko takvi postoje.

- (10) 3. Ako neke takve uopće postoje, odredite sve regularne 3×3 realne matrice oblika $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & z & -1/y \end{pmatrix}$ koje su jednake svojoj inverznoj matrici.

- (10) 4. Odredite sve matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, takve da je za svaki prirodan broj $n \geq 2$ matrica A^n donje trokutasta, te da je trag matrice A^9 jednak nuli.

- (10) 5. Neka je W skup svih matrica oblika $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, gdje su svi matricni koeficijenti realni brojevi te je umnožak ace pozitivan racionalan broj.

- (a) Je li W podgrupa grupe $GL_3(\mathbb{R})$? Ako da, posebno izračunajte inverz matrice A , dane kao gore.
- (b) Postoje li neke dvije matrice $A, B \in W$ koje na glavnim dijagonalama imaju svuda jedinice i takve su da je $AB \neq BA$? Ako da, nađite neke takve dvije matrice.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!