Zadatak:	1	2	3	4	5	$\sum$
Bodovi:	10	10	10	10	10	50
Osvojeni bodovi:						

JMBAG: ____________ IME I PREZIME: ______________________

Linearna algebra 2 - 2. kolokvij

25.06.2021.

(10) 1. (i) Izračunajte inverz kvaterniona $(J_1 + J_3)(J_1 - J_2)$.

(ii) Riješite sljedeći sustav jednadžbi u kvaternionima:

$$\begin{aligned} J_2 Z_1 + J_1 Z_3 &= 0 \\ J_3 Z_1 + Z_2 - J_1 Z_3 &= J_1 + J_2 + J_3 \\ Z_2 + J_3 Z_3 &= -I + J_1. \end{aligned}$$

(10) 2. Odredite spektar i svojstvene potprostore za operator $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^3$ dan matricom $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Može li se zadani operator dijagonalizirati?

(10) 3. (a) Neka je B $n \times n$ kompleksna matrica. Definirajte karakteristični polinom od B. Zatim posebno navedite kako se njegov slobodni član može napisati kao funkcija od B, a onda to i detaljno dokažite.

(b) Neka je V konačno dimenzionalan realan vektorski prostor i neka je $C : V \to V$ linearan operator. Pretpostavimo da su α i β dvije različite realne nultočke karakterističnog polinoma od C. Jesu li nužno α i β svojstvene vrijednosti operatora C? (Odgovor obrazložite!) Ako da, i ako su v i w pripadni svojstveni vektori za α i β, redom, moraju li nužno v i w biti linearno nezavisni? (Ako da, pokažite to; ako ne, nađite konkretan primjer koji to pokazuje.)

(10) 4. Neka je $\big(V, (\cdot|\cdot)\big)$ konačno dimenzionalan kompleksan unitaran prostor i neka je $H \in \mathcal{L}(V)$ hermitski operator.

(a) Detaljno pokažite da za bilo koje nenul realne brojeve r i s, svaki λ iz spektra operatora $rI + sH^2$ je nužno realan broj.

(b) Postoji li neki antihermitski operator $A \in \mathcal{L}(V)$ koji komutira s operatorom H i takav je da se kompleksan broj $1 + \imath$ nalazi u spektru operatora AH? Ako da, nađite neke takve operatore H i A.

(10) 5. Neka je $\mathrm{U}(n)$ grupa $n \times n$ (kompleksnih) unitarnih matrica i neka je $\Omega \in \mathrm{U}(n)$ neka fiksirana matrica. Definirajmo $\mathcal{S}$ kao skup svih matrica $M \in \mathrm{U}(n)$ takvih da M i Ω komutiraju. Je li $\mathcal{S}$ nužno podgrupa od $\mathrm{U}(n)$? Ako da, je li to nužno beskonačna podgrupa (tj., podgrupa koja ima beskonačno mnogo elemenata)?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali, ukoliko se to izričito ne traži, iste ne morate dokazivati. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!