Zadatak:	1	2	3	4	5	$\sum$
Bodovi:	10	10	10	10	10	50
Osvojeni bodovi:						

JMBAG: ____________________ IME I PREZIME: ____________________________________

Linearna algebra 2 - 2. kolokvij

24.06.2022.

(10) 1. (i) Izračunajte inverz kvaterniona $Z = (J_1 - J_2)^2 + J_3^3$.

(ii) Riješite sljedeći sustav jednadžbi u kvaternionima:

$$\begin{aligned} Z_1 + J_1 Z_2 - J_3 Z_3 &= I - J_3 \\ J_3 Z_1 + J_1 Z_2 + Z_3 &= J_3 - I \\ J_2 Z_1 + Z_2 - J_2 Z_3 &= 0. \end{aligned}$$

(10) 2. Odredite spektar i svojstvene potprostore za operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi $\mathcal{E}$ dan matricom $A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ 8 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Može li se zadani operator dijagonalizirati? Može li se on dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi od $\mathbb{R}^3$ (ortonormiranoj s obzirom na kanonski skalarni produkt)?

(10) 3. Neka je $\big(V, (\cdot|\cdot)\big)$ konačno dimenzionalan kompleksan unitaran prostor.

(a) Odredite sve lin. operatore $A \in \mathcal{L}(V)$ takve da je $(v|Aw) = 0$ za bilo koje vektore $v, w \in V$. Svoju tvrdnju detaljno obrazložite.

(b) Precizno definirajte pojam hermitski adjungiranog operatora A^* za dani operator $A \in \mathcal{L}(V)$, te pokažite da je taj hermitski adjungiran operator jednoznačno određen.

(10) 4. (a) Precizno definirajte pojam hermitski adjungirane matrice za danu $n \times n$ kompleksnu matricu te pojam ortogonalne $n \times n$ realne matrice, a zatim pokažite da skup svih ortogonalnih matrica (uz standardnu operaciju množenja matrica) jest podgrupa od $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(b) Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica. Označimo sa s_i i-ti stupac te matrice, za $i = 1, \dots, n$. Da li stupci $(s_1, \dots, s_n)$ nužno čine ortonormiranu bazu unitarnog prostora $\mathbb{R}^n$, snabdjevenog kanonskim skalarnim produktom. Ako da, dokažite to; a ako ne nađite konkretnu matricu A koja je protuprimjer.

(10) 5. Neka je V konačno dimenzionalan kompleksan unitaran prostor. Neka su $H, A \in \mathcal{L}(V)$ regularni operatori takvi da je H hermitski i A antihermitski operator. Za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ definiramo novi operator

$$M = \overline{\lambda} HAH + (1 - \imath\lambda^3) HAHAH.$$

(Sa $\imath \in \mathbb{C}$ označavamo imaginarnu jedinicu, a s $\overline{\lambda}$ kompleksni konjugat broja λ.) Postoji li barem jedan $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ takav da je M hermitski operator? Ako da, nađite neki takav λ.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali, ukoliko se to izričito ne traži, iste ne morate dokazivati. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!