

## Linearna algebra 2 - 2. kolokvij 23.06.2023.

(10) 1. (i) Odredite inverz kvaterniona  $Z = J_2^5(J_1 - J_3)^2$ .

(ii) Riješite sljedeći sustav jednačbi u kvaternionima:

$$\begin{aligned} J_3 Z_1 - J_1 Z_2 - J_3 Z_3 &= 0 \\ Z_1 + J_3 Z_2 + J_1 Z_3 &= J_1 - I \\ -J_1 Z_1 + J_3 Z_2 + Z_3 &= I - J_1. \end{aligned}$$

(10) 2. Odredite spektar i svojstvene potprostore operatora  $A \in L(\mathbb{R}^3)$ , čiji je matični prikaz u kanonskoj bazi  $\mathcal{E}$  od  $\mathbb{R}^3$  dan matricom  $A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Može li se zadani operator dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi (ortonormiranoj s obzirom na standardni skalarni produkt u  $\mathbb{R}^3$ )? Ukoliko može, odredite jednu takvu bazu.

(10) 3. (a) Neka je  $V$  konačno dimenzionalan realan vektorski prostor i  $A \in L(V)$  neki linearan operator. Ako su  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  dvije međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora  $A$ , postoje li neki vektor  $v$  iz svojstvenog potprostora od  $A$  za svojstvenu vrijednost  $\lambda$  i neki vektor  $w$  iz svojstvenog potprostora od  $A$  za svojstvenu vrijednost  $\mu$ , koji su oba različita od nul-vektora i istovremeno su  $v$  i  $w$  linearno nezavisni?

(b) Definirajte pojam hermitski adjungirane matrice za neku  $n \times n$  kompleksnu matricu  $M$ .

(c) Neka je  $(V, (\cdot | \cdot))$  konačno dimenzionalan kompleksan unitaran prostor i  $H \in L(V)$  hermitski operator. Pokažite da je spektar operatora  $H$  sadržan u skupu realnih brojeva.

(10) 4. (a) Postoje li neki kompleksni brojevi  $x, y, z$  i  $w$  takvi da je matrica  $C = \begin{pmatrix} i & x & 1+i \\ -2 & y & w \\ z & 0 & 3i \end{pmatrix}$  antihermitska te da je njezina determinanta realan broj? (Ovdje je  $i$  imaginarna jedinica u  $\mathbb{C}$ .) Ako da, nađite neku takvu matricu.

(b) Neka je  $(V, (\cdot | \cdot))$  konačno dimenzionalan kompleksan unitaran prostor. Postoji li neki unitaran operator  $U \in L(V)$  za koji postoje tri međusobno različita broja  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$  tako da su i operatori  $r_1 U, r_2 U$  i  $r_3 U$  također unitarni? Ako da, nađite neki takav operator  $U$ .

(10) 5. Odredite sve matrice  $W \in M_3(\mathbb{R})$  koje su istovremeno i ortogonalne i gornje trokutaste.

**Napomena.** Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!