LAF1, 4. PREDAVANJE (21. LISTOPAD 2024.)

Neka je dana $m \times n$ matrica $A = (a_{ij})$. Rekli smo da ako označimo i-ti redak te matrice kao $\boldsymbol{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, onda se matricu A može zapisati u formi

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix}.$$

Prošli put smo definirali tri vrste *elementarnih transformacija*:

Tip 1 Zamjena dva retka; npr. i-tog i j-tog, gdje BSO možemo uzeti $i < j$. Tada:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix} \longmapsto \overline{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix}.$$

(Znači, samo i-ti i j-ti redak zamjene mjesta , a sve ostalo ostaje na miru.)

Tip 2 Množenje nekog retka, npr. i-tog, skalarom $\lambda \neq 0$. Tada:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix} \longmapsto \overline{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \lambda\boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix}.$$

(Znači, svaki matrični koeficijent a_{ij} iz i-tog retka pomnožimo s λ, a sve ostalo ne diramo.)

Tip 3 Pribrajanje npr. i-tog retka pomnoženog skalarom λ j-tom retku. Tada:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix} \longmapsto \overline{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_j + \lambda\boldsymbol{r}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix}.$$

Napomena. (1) Primijetimo da svaka od tri tipa elementarnih transformacija ima svoju *inverznu elementarnu transformaciju.* Sasvim precizno rečeno, za gore opisana tri tipa imamo ovako.

Tip 1 Inverzna je el. transf. ponovo zamjena i-tog i j tog retka. Naime, nakon što jednom načinimo tu el. transf., u i-tom retku imamo $\boldsymbol{r}_j$, a u j-tom retku imamo $\boldsymbol{r}_i$. Nakon što još jednom napravimo zamjenu i-tog i j-tog retka dobit ćemo početnu matricu A.

Tip 2 Inverzna je el. transf. množenje skalarom $\lambda^{-1} = 1/\lambda$. Jer ako prvo i-ti redak pomnožimo s λ, a onda novo dobiveni redak s $1/\lambda$, to je isto kao da smo i-ti redak pomnožili s $\lambda \frac{1}{\lambda} = 1$.

Tip 3 Inverzna je el. transf. pribrajanje i-tog retka pomnoženog s $-\lambda$ j-tom retku. (Zašto?!)

(!!!) Za bilo koju od opisana tri tipa el. transf. na matrici A, dobivanje nove matrice $\overline{A}$ označavamo s

$$A \sim \overline{A}.$$

(2) Jasno, el. transformacije možemo komponirati; tj., vršiti jednu za drugom. Ako na početku imamo neku matricu A, i ako iz nje nizom el. transformacija dobijemo matricu $\overline{A}$, i sada koristimo gornju oznaku: $A \sim \overline{A}$.

Važno je primijetiti kako izvođenjem elementarnih transformacija na skupu matrica $M_{mn}(\mathbb{R})$ (možemo $\mathbb{R}$ zamijeniti bilo kojim poljem $\mathbb{F}$!) dobivamo relaciju ekvivalencije. Tojest, imamo

(i) $\sim$ je refleksivna relacija; tj., $A \sim A$, za svaku matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$:

(ii) $\sim$ je simetrična relacija; tj., ako su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$, onda

$$A \sim B \;\Rightarrow\; B \sim A.$$

Naime, ako od A do B dolazimo nizom el. transf. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ redom, onda se od B do A "vraćamo" nizom inverznih el. transf. $\varepsilon_k^{-1}, \ldots, \varepsilon_1^{-1}$ redom. (Ovdje za el. transf. ε s ε^{-1} označavamo njoj inverznu el. transf.)

(iii) $\sim$ je tranzitivna relacija; tj., ako su $A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{R})$, onda

$$(A \sim B \;\text{ i }\; B \sim C) \;\Rightarrow\; A \sim C.$$

Naime, ako od A do B dolazimo nizom el. transf. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ i od B do C nizom el. transf. $e_1, \ldots, e_\ell$; onda od A do C dolazimo "spojenim" nizom el. transf. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, e_1, \ldots, e_\ell$.

(!!!) Ako smo od matrice A došli nekim nizom el. transf. do matrice $\overline{A}$, govorimo da su matrice A i $\overline{A}$ **ekvivalentne** (po relaciji ekvivalencije $\sim$).

Primjer. Neka je dana matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Napravimo sljedeći niz el. transfomacija:

(ET1) Pomnožimo 3. redak s 2 i to pribrojimo 1. retku; tj., $\boldsymbol{r}_1 - 2\boldsymbol{r}_3$.

(ET2) Pomnožimo 1. redak s 2.

(ET3) Zamijenimo 1. i 3. redak.

Kada napravimo taj niz od tri el. transf., dobivamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(ET1)}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(ET2)}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(ET3)}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} := \overline{A}$$

(!!!) Primijetimo: Analogno kako smo radili u Gaussovoj metodi eliminacije sa sustavima linearnih jednadžbi, svaku matricu možemo el. transformacijama svesti na njoj ekvivalentnu matricu koja je GORNJE (ili DONJE) STEPENASTA, po retcima! Naprimjer, za gore danu matricu A imamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} := \overline{A}$$

Zadatak. *Svedite matricu* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *najprije na njoj ekvivalentnu gornje stepenastu matricu, po retcima, a zatim na njoj ekvivalentnu donje stepenastu matricu, po retcima.*

Domaća zadaća. Pažljivo pročitajte odjeljke 2.4.13 do 2.4.22 u skripti [MP].

∗ Linearne kombinacije vektora i sustavi linearnih jednadžbi

Sada želimo definirati jedan važan pojam u linearnoj algebri. Za to načiniti, pretpostavimo da je V neki vektorski prostor (npr. $V = \mathbb{R}^n$), i neka su $v_1, \ldots, v_k \in V$ neki vektori.

Definicija 0.1. Kažemo da je vektor $v \in V$ **linearna kombinacija** vektora $v_1, \ldots, v_k$ ako postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i.$$

Naprimjer, vektor $v = (5, -3, -1, 4)$ je linearna kombinacija vektora $v_1 = (1, 0, 1, 2)$ i $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$; jer je $v = 2v_1 - 3v_2$. (Provjerite to!)

Primijetimo: Ako je dan sustav linearnih jednadžbi

$$(\star) \qquad \begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

i ako označimo njegove stupce $\boldsymbol{s}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, za $i = 1, \ldots n$, te $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, onda se sustav $(\star)$ može napisati kao

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{b}.$$

Tojest, $\boldsymbol{b}$ je linearna kombinacija vektora-stupaca $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n$; gdje su $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ skalari.

Pogledajmo još jedan primjer.

Primjer. Funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

zove se **polinom** s realnim *koeficijentima* a_i, ili kraće **realni polinom**. Označimo

$$\mathbb{R}[x] = \text{skup svih realnih polinoma.}$$

Posebno definiramo nul-funkciju $\mathbf{0}$, s $\mathbf{0}(x) = 0 \in \mathbb{R}$, za svaki $x \in \mathbb{R}$; to je tzv. **nul-polinom**. Znamo kako se dva polinoma zbrajaju: za $p(x)$ kao gore i $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ je

$$p(x) + q(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots$$

Isto tako, za $p(x)$ kao gore i $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lambda \cdot p(x) := (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n.$$

Sada se lako provjeri da uz te operacije zbrajanja i množenja polinoma skalarima

skup $\mathbb{R}[x]$ je realan vektorski prostor.

Ovdje naprimjer prrimijetimo da je polinom $p(x) = 2x^3 - x - 2$ linearna kombinacija polinoma $p_1 = 2x^2 - 1$, $p_2(x) = x^3 - x^2$ i $p_3(x) = x + 1$; jer je

$$p = p_1 + 2p_2 - p_3.$$

Sada želimo uvesti još jedan temeljni pojam.

Definicija 0.2. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Neprazan podskup $W \subseteq V$ koji je vektorski prostor s obzirom na <u>iste</u> operacije zbrajanja i množenja skalarima u V, zove se **vektorski potprostor**, ili kraće **potprostor** od V. Pritom koristimo oznaku

$$W \leq V.$$

(Kad god budemo imali neki vektorski prostor V i neki njegov podskup W za koji ćemo napisati $W \leq V$, automatski ćemo pretpostavljati da je W potprostor od V.)

Dokažimo sljedeću jednostavnu propoziciju koja karakterizira potprostore nekog danog vektorskog prostora.

Propozicija 0.3. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, i pretpostavimo da je $W \subseteq V$ neki neprazan podskup. Tada je ekvivalentno:*

(a) *W je potprostor od V; tj., $W \leq V$.*
(b) *Za bilo koje vektore $w_1, w_2 \in W$ i skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ je i linearna kombinacija $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ također vektor iz W.*

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) Ako je $w_1 \in W$ i $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, onda je i $\lambda_1 w_1 \in W$; jer je W zatvoren za množenje skalarima. Sasvim analogno, ako su $w_2 \in W$ i skalar $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, onda je i $\lambda_2 w_2 \in W$.

Sada, jer su vektori $\lambda_1 w_1$ i $\lambda_2 w_2$ iz W, a W je zatvoren za zbrajanje vektora, zaključujemo da je i

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W;$$

i tako je željena implikacija dokazana.

(b)$\Rightarrow$(a) Jer vrijedi (b), jasno je da imamo preslikavanje

$$W \times W \ni (w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2 \in W.$$

Tojest, $+ : W \times W \to W$ je dobro definirano zbrajanje; ili, drugačije rečeno, W je zatvoren za zbrajanje.

Analogno, imamo preslikavanje

$$\mathbb{R} \times W \ni (\lambda, w) \longmapsto \lambda w \in W.$$

Tojest, dobro je definirano skalarno množenje : $\mathbb{R} \times W \to W$; ili, drugačije rečeno, W je zatvoren za skalarno množenje.

Jasno, svojstva (Z1)–(Z4) i (S1)–(S3) se nasljeđuju iz V. Tako vidimo da je doista W potprostor od V. $\square$

!!! Znači, ako imamo neki vektorski prostor V, nad bilo kojim poljem $\mathbb{F}$, i neki njegov podskup $S \subseteq V$, da bismo provjerili je li S štoviše potprostor od V treba uzeti proizvoljne vektore $v_1, v_2 \in S$ i proizvoljne skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, te provjeriti je li nužno linearna kombinacija $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ također iz S. Ako da, S je potprostor; inače nije.

Napomena 0.4. Ponekad se u definiciji potprostora zahtijeva da on sadrži nul-vektor. Ali to je suvišan zahtjev. Naime, ako je V vektorski prostor i $W \leq V$ potprostor, onda postoji bar jedan vektor $w \in W$. A onda za $w_1 = w_2 = w$ i $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, po prethodnoj propoziciji imamo da je i

$$0_V = 1\,w + (-1)w \in W.$$

Dakle, čim je neki podskup vektorskog postora njegov potprostor, on MORA sadržavati barem nul-vektor.

I sljedeća propozicija daje jednu zanimljivu opservaciju.

Propozicija 0.5. *Neka je V (realan) vektorski prostor i neka su $W_1, W_2 \leq V$, njegovi potprostori. Tada je i (skupovni) presjek $W_1 \cap W_2$ također potprostor od V; tj., imamo*

$$W_1 \cap W_2 \leq V.$$

Općenitije, ako imamo kolekciju potprostora $W_i \leq V$, gdje indeksi i idu po bilo kojem skupu indeksa I, onda je i skupovni presjek svih tih W_i-ova također potprostor od V; tj., imamo da je

$$\bigcap_{i \in I} W_i \leq V.$$

Dokaz. Dokaz lagano slijedi iz definicije presjeka bilo koje kolekcije skupova, i gornjeg *kriterija potprostora*, koji smo dokazali u prethodnoj propoziciji.

Pokazat ćemo općenitiju tvrdnju. Naime, za dane potprostore $W_i \leq V$ definirajmo skup

$$W := \bigcap_{i \in I} W_i \subseteq V.$$

Moramo pokazati da je $W \leq V$, potprostor. Naime, pretpostavimo da su $w_1, w_2 \in W$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Kako su w_1, w_2 iz W, po definiciji presjeka skupova zaključujemo da su w_1 i w_2 iz potprostora W_i, za svaki indeks $i \in I$. Ali sada, jer je $W_i \leq V$ potprostor, mora biti i linearna kombinacija

$$w := \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W_i, \quad \forall i \in I.$$

Znači da je $w \in W_i$, za svaki $i \in I$. No onda, opet po definiciji presjeka skupova, zaključujemo da je $w \in W$. Dakle, za bilo koje vektore $w_1, w_2 \in W$ i bilo koje skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, pokazali smo da je nužno i linearna kombinacija $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$. Tako je propozicija dokazana. $\square$

Kada smo bili definirali pojam vektorskog prostora, kao jedan od primjera naveli smo, bez dokaza, upravo ono o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 0.6. (v. [MP, 2.8.16])
Ako je dana matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, onda je skup svih rješenja homogenog sustava

$$Ax = \mathbf{0}$$

potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Prvo se podsjetimo (što je i sasvim očito) da je nul-vektor iz $\mathbb{R}^n$ rješenja danog homogenosg sustava. Dakle, ako sa W označimo skup svih njegovih rješenja, taj skup W nije prazan. Neka su onda dana dva rješenja sustava, $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$; gdje "t" označava transponiranje. Drugim riječima, x i y gledamo kao jedno-stupčane matrice. I neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Znajući kako se množe matrica iz $M_{mn}(\mathbb{R})$ i vektor-stupac iz $\mathbb{R}^n$, imamo

$$\begin{aligned} A(\lambda x + \mu y) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(\lambda x_j + \mu y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(\lambda x_j + \mu y_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\lambda x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}\lambda x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\mu y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}\mu y_j \end{pmatrix} = \cdots = \lambda Ax + \mu Ay. \end{aligned}$$

Po *kriteriju potprostora* vidimo da je W doista potprostor od $\mathbb{R}^n$. $\square$

!!! Primijetimo da ako je dan neki vektorski prostor V, onda su tzv. **nul-prostor** $\{0_V\}$ i cijeli V potprostori od V. To su tzv. **trivijalni potprostori**; a svi ostali su **pravi**, ili **netrivijalni** potprostori.

$*$ Kvocijentni vektorski prostor

Kad god imamo neke vektorske prostore, zanimljivo nam je vidjeti kako iz njih, nekim konstrukcijama možemo eventualno dobiti neke nove vektorske prostore. Prvi je način bio da u njima potražimo neke potprostore. Druga jako važna konstrukcija je konstrukcija *kvocijentnog prostora*, koju ćemo sada uvesti.

Neka je V vektorski prostor i neka je $W \leq V$, neki potprostor. (Mi gledamo realne vektorske prostore, iako bismo bez ikakvih ograničenja i/ili poteškoća mogli gledati prostore nad bilo kojim poljem $\mathbb{F}$.) Onda na V definirajmo jednu relaciju ovako:

$$(\forall x, y \in V) \qquad x \sim y \overset{\text{def.}}{\iff} x - y \in W$$

Lako se provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije. (Provjerite to!) Za neki element $x \in V$ imamo odgovarajuću klasu $[x]$, za tu relaciju, koju standardno označavamo s

$$[x] = x + W = \{x + w \mid w \in W\}.$$

Primijetimo da je klasa $x+W \subseteq V$, podskup; što i znamo otprije. Isto tako kažimo da se element $x \in V$ zove **reprezentant klase** $x+W$. Iz saame definicije pojma klase je jasno da ako imamo dva elementa $u, v \in V$ onda vrijedi:

$$u + W = v + W \iff u - v \in W. \qquad (\star)$$

(Ovo je jako važno dobro razumijeti!)

Nadalje, definirajmo pripadni kvocijentni skup

$$V/W := \text{skup svih klasa } x+W, \text{ za sve } x \in V.$$

Taj skup V/W je objekt koji nas zanima. Naime, vrijedi sljedeći osnovni rezultat.

Teorem 0.7. (Kvocijentni vektorski prostor)
Skup V/W, uz operaciju zbrajanja

$$+ : V/W \times V/W \to V/W, \qquad (x+W) + (y+W) := (x+y) + W,$$

i operaciju množenja skalarima

$$\cdot : \mathbb{R} \times V/W \to V/W, \qquad \lambda \cdot (x+W) := \lambda x + W,$$

je vektorski prostor. To je tzv. **kvocijentni prostor** *od V po potprostoru W.*

Dokaz. Kada god imamo neku operaciju (ili funkciju) definiranu na skupu klasa, dobivenih po nekoj relaciji ekvivalencije, treba obavezno provjeriti je li ta nova operacija (ili funkcija) dobro definirana. Preciznije rečeno: *Treba vidjeti da operacija ne ovisi o izboru reprezentanata klasa.*

Sasvim precizno, pretpostavimo da su elementi, tj. vektori, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ takvi da je

$$x_1 + W = x_2 + W \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in W \qquad \text{i} \qquad y_1 + W = y_2 + W \Leftrightarrow y_1 - y_2 \in W.$$

Znači, x_1 i x_2 su dva reprezentanta prve klase, a y_1 i y_2 su dva reprezentanta druge klase. Način na koji smo u iskazu teorema definirali zbrajanje u V/W nam govori da te dvije klase zbrajamo kao

$$(x_1 + W) + (y_1 + W) := (x_1 + y_1) + W.$$

Ali isto tako, ako uzmemo drugi par reprezentanata naših klasa, imamo da je

$$(x_2 + W) + (y_2 + W) := (x_2 + y_2) + W.$$

I sada je pitanje: Jesu li oba rezultata zbrajanja danih klasa jednaki? Tojest, imamo li da je

$$(x_1 + y_1) + W \overset{?}{=} (x_2 + y_2) + W.$$

Ali imajući na umu $(\star)$, posljednja je jednakost ekvivalentna s pitanjem:

$$\text{Je li } Z := (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \text{ element iz } W?$$

Ali kako je

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2),$$

i kako smo gore primijetili da su $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in W$, zaključujemo da je element Z iz potprostora W; jer on je zbroj dva vektora iz W. Dakle, doista zbrajanje klasa NE OVISI o izboru reprezentanata tih klasa.

Dalje treba vidjeti i da skalarno množenje ne ovisi o izboru reprezentanata. Naime, neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, i neka su $x_1, x_2 \in V$ takvi da je $x_1 + W = x_2 + W$. Pitanje je onda: Vrijedi li

$$(\lambda \cdot x_1) + W \overset{?}{=} (\lambda \cdot x_2) + W.$$

Ali gornja je jednakost ekvivalentna, opet po ($\star$), s pitanjem:

$$\text{Je li } \lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot x_2 = \lambda \cdot (x_1 - x_2) \text{ element iz } W?$$

No odgovor je očito potvrdan (Zašto?!); i zato je i naše skalarno množenje dobro definirano.

Preostaje provjeriti da smo doista na taj način dobili vektorski prostor. Drugim riječima, valja nam provjeriti da ove operacije zbrajanja i skalarnog množenja zadovoljavaju one uvjete (Z1)–(Z4) i (S1)–(S3) iz definicije vektorskog prostora. (Provjerite to detaljno!) $\square$