# RJEŠENJA: LA 1, 1. kolokvij, (06.12.2024.)

**Zad. 1** *Nađite skup svih rješenja* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *sustava*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

*i zatim nađite ono specijalno rješenje koje zadovoljava uvjet* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

Rješenje. **(2 boda)** Sustav rješavamo elementarnim transformacijama na retcima proširene matrice danog sustava.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \mapsto \{R1 - 2 \cdot R3\} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \mapsto \{R2 - 2 \cdot R1\}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \mapsto \{R1 \leftrightarrow R2\} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

**(1 bod)** Sada, gledajući zadnje dobivenu proširenu matricu, iz prve jednadžbe $5x_3 - 5x_4 = 0$ dobivamo da je $x_4 = x_3$.

**(1 bod)** Dalje, ako u drugu jednadžbu $x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3$ stavimo $x_4 = x_3$, dobivamo $x_2 = 3$.

**(1 bod)**Naposljetku, ako u treću jednadžbu $x_1 + 2x_3 + x_4 = -1$ stavimo $x_4 = x_3$, dobivamo $x_1 = -1 - 3x_3$.

**(3 boda)** Znači, ako stavimo $x_3 = t$, za parametar $t \in \mathbb{R}$, dobivamo da je skup rješenja

$$S := \{(-1 - 3t, 3, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

*Napomena.* Ako je na neki drugi način dobiveno gornje rješenje, bodovanje se provodi analogno.

**(2 boda)** Konačno, za traženo specijalno rjeěnje je uvjet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 - 3t + 3 + t + t = 2 - t = 7 \quad \Rightarrow \quad t = -5;$$

i onda je traženo specijalno rješenje $(14, 3, -5, -5)$.

---

**Zad. 2** *Što dobijemo ako na ravninu*

$$\mathcal{M} = \{(1, 0, 1) + \lambda(2, 3, 2) + \mu(1, 1, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

*djelujemo operatorom rotacije oko x-osi za kut $\pi/4$, a zatim operatorom projekcije na xz-ravninu?*

Rješenje. Operator projekcije na $xz$-ravninu označimo s $P$, a operator rotacije oko $x$-osi za kut $\pi/4$ označimo s $R$. Matrica operatora $R$ je

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Neka je $a \in \mathcal{M}$ proizvoljan. Tada je

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

za neke $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Djelovanjem na $a$ operatorom $R$ dobivamo

$$Ra = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $P(x, y, z) = (x, 0, z)$, imamo

$$PRa = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je

$$\begin{aligned} PR(\mathcal{M}) &= \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1+\mu) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \langle v_1, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

gdje su $v_1 = (1, 0, \sqrt{2}/2), v_2 = (2, 0, 5\sqrt{2}/2)$. Dakle, $PR(\mathcal{M})$ je ravnina kroz ishodište razapeta vektorima $v_1$ i $v_2$.

**Bodovanje**:

- 4 boda za identifikaciju i zapis operatora (2 boda za $P$, 2 boda za $R$),
- 4 boda za točan raun (1 bod za zapis generičnog vektora $a \in \mathcal{M}$, 2 boda za račun $Ra$, 1 bod za račun $PRa$),
- 2 boda za dovršetak zadatka (ispravno napisan zaključak)

---

**Zad. 3** *Neka je dana matrica* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *i onda definirajmo* $U$ *kao vektorski potprostor od* $\mathbb{R}^4$ *koji se sastoji od svih vektora* $x = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *takvih da je* $Ax = (0, 0)$*. (Ovdje* $Ax$ *jest standardno množenje matrice* $A$ *i vektora* $x$*.) Nađite neku bazu* $\mathcal{B}$ *od* $U$ *i detaljno objasnite zašto je to doista baza. Je li skup vektora* $\mathcal{B} \cup \{e_1, e_2\}$ *baza vektorskog prostora* $\mathbb{R}^4$*? (Ovdje su* $e_1$ *i* $e_2$ *standardni kanonski vektori.)*

Rješenje. **(1 bod)** Iz uvjeta zadatka imamo da je

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \quad \text{i} \quad 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0\}.$$

**(2 boda)** Ako sada od 1. jednadžbe oduzmemo 2. jednadžbu pomnoženu s 2, dobivamo:

$$0 = (x_1 + 2x_2 + 6x_3) - 2(2x_1 + x_2 - 3x_4) = -3x_1 + 6x_3 + 6x_4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2x_3 + 2x_4.$$

I zatim je

$$x_2 = -2x_1 + 3x_4 = (-4x_3 - 4x_4) + 3x_4 = -4x_3 - x_4.$$

Zaključujemo da je

$$U = \{(2x_3 + 2x_4, -4x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

**(3 boda)** Ako stavimo $b_1 := (2, -4, 1, 0)$ i $b_2 := (2, -1, 0, 1)$, onda se svaki vektor $v \in U$ očito na jedinstven način prikazuje kao $v = x_3 b_1 + x_4 b_2$; i zato je $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ jedna baza od $U$. Ekvivalentno rečeno, taj skup razapinje prostor $U$ i istovremeno je lin. nezavisan.

**(4 boda)** Tvrdimo da je $\mathcal{C} := \mathcal{B} \cup \{e_1, e_2\}$ baza prostora $\mathbb{R}^4$. Budući je $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ i $\mathcal{C}$ se sastoji od 4 vektora, očito je dovoljno pokazati da je $\mathcal{C}$ skup lin. nezavisnih vektora. U tu svrhu pretpostavimo da za neke skalare $\alpha_i$ imamo

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, -4\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1, \alpha_2) = (0,0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Tada je očito $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ i zatim i $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Zaključak: $\mathcal{C}$ je lin. nezavisan skup vektora.

---

**Zad. 4** *Neka je $V$ realan vektorski prostor.*

(a) *Neka je $S \subseteq V$ neki neprazan skup vektora, moguće i beskonačno mnogo njih. Precizno definirajte linearnu ljusku razapetu sa $S$. Zatim detaljno dokažite da je ta linearna ljuska vektorski potprostor od $V$.*

(b) *Neka je $W$ neki potprostor od $V$ i neka je $v_0 \in V$ neki vektor različit od nul-vektora. Definirajmo $\Omega$ kao skup svih vektora iz $V$ oblika $\lambda(w + v_0)$, za proizvoljni vektor $w \in W$ i proizvoljan skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Je li $\Omega$ vektorski potprostor od $V$?*

Rješenje. (a) **(2 boda)** Linearna ljuska $\langle S \rangle$ definirana je kao presjek $\langle S \rangle := \bigcap_{W \in \Delta} W$, gdje smo s $\Delta$ označili skup svih potprostora $W \leq V$ takvih da je $S \subseteq W$.

**(2 boda)** Da bismo pokazali da je $\langle S \rangle$ potprostor od $V$ dovoljno je pokazati da za bilo koje $v_1, v_2 \in \langle S \rangle$ i bilo koje $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ imamo da je i lin. kombinacija $v := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ također iz $\langle S \rangle$. Ali $v_1, v_2 \in \langle S \rangle$ znači, po definiciji presjeka kolekcije skupova iz $\Delta$, da su $v_1, v_2 \in W$ za svaki $W \in \Delta$. Ali jer je $W \leq V$ potprostor, onda je i $v \in W$, za svaki $W \in \Delta$. Zaključujemo da je $v \in \bigcap_{W \in \Delta} W = \langle S \rangle$.

(b) **(6 bod.)** Prvo primijetimo da ako je $v_0 \in W$, onda je zapravo

$$\Omega = \{\lambda(w + v_0) \mid w \in W \ \text{ i } \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda z \mid z \in W \ \text{ i } \ \lambda \in \mathbb{R}\} = W;$$

i to je jasno potprostor od $V$.

Tvrdimo: *Ako $v_0 \notin W$, onda $\Omega$ nije vekt. potprostor od $V$.* Naime, za $w_1, w_2 \in W$ međusobno različite posebno imamo da su $u_1 = 1 \cdot (w_1 + v_0) = w_1 + v_0$ i $u_2 := (-1) \cdot (w_2 + v_0) = -w_2 - v_0$ iz $\Omega$. Ako bi $\Omega$ bio vekt. potprostor od $V$, posebno bi bilo da je $u_1 + u_2 = w_1 - w_2 \in \Omega$. Ali to bi značilo da postoje neki $\alpha \in \mathbb{R}$ i neki $w \in W$ takvi da je $w_1 - w_2 = \alpha(w + v_0)$. Jasno, nužno bi bilo $\alpha \neq 0$. Ali onda bismo imali da je

$$v_0 = \frac{1}{\alpha}(w_1 - w_2) - w \in W;$$

što nije slučaj.

---

**Zad. 5** *Neka su $V$, $W$ i $X$ konačno-dimenzionalni realni vektorski prostori te neka je $f : V \to W$ surjektivan linearan operator. Pretpostavimo da je $g : W \to X$ neko preslikavanje takvo da je kompozicija $g \circ f$ linearan operator iz $V$ u $X$. Mora li preslikavanje $g$ nužno biti linearan operator?*

Rješenje. Tvrdimo da je $g$ **nužno lin. operator**.

**(5 bod.)** Pokažimo prvo da je on homogen. U tu svrhu neka su $\lambda \in \mathbb{R}$ i $w \in W$ proizvoljno uzeti. Nadalje, kako je $f$ surjekcija, postoji $v \in V$ t. d. je $f(v) = w$. Sada računamo:

$$\begin{aligned} g(\lambda w) &= g(\lambda f(v)) = (\text{jer je } f \text{ lin. op., pa je posebno homogeno preslikavanje}) = g(f(\lambda v)) \\ &= (\text{ po def. kompozicije } g \circ f) = (g \circ f)(\lambda v) \\ &= (\text{jer je } g \circ f \text{ lin. op., pa je posebno homogeno preslikavanje}) = \lambda (g \circ f)(v) \\ &= \lambda g(f(v)) = \lambda g(w); \end{aligned}$$

tj., $g$ je doista homogeno preslikavanje.

**(5 bod.)** Sada pokazujemo da je $g$ i aditivno preslikavanje. U tu svrhu neka su $w_1, w_2 \in W$, te onda $v_1, v_2 \in V$ t. d. je $f(v_j) = w_j$, za $j = 1, 2$. (Jasno, ponovo zbog surjektivnosti od $f$, takvi $v_j$ postoje!) Koristeći iste argumente kao gore (tako da na odgovarajućim mjestima zamijenimo riječ "homogeno" s riječi aditivno"), računamo:

$$\begin{aligned} g(w_1 + w_2) &= g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1 + v_2))(g \circ f)(v_1 + v_2) \\ &= (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = g(w_1) + g(w_2); \end{aligned}$$

tj., $g$ je doista i aditivno preslikavanje.

---

**Napomena. (1)** Posebno u Zad. 5 sve treba biti sasvim precizno napisano te jasno i korektno argumentirano da bi se dobilo navedene bodove!

**(2)** Gore napisana rješenja zadataka su jako detaljna, i glavni im je cilj pokazati studentu kako bi zapravo trebalo rješavati zadatke na kolokvijima.