Zadatak:	1	2	3	4	5	$\sum$
Bodovi:	10	10	10	10	10	50
Osvojeni bodovi:						

JMBAG: ______________ IME I PREZIME: ________________________

Linearna algebra 1 - 2. kolokvij

15.02.2022.

(10) 1. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + 2x_3, -x_1 - 2x_3 + x_4, 2x_2, 2x_1 + 4x_3).$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^4$, jednu bazu jezgre operatora A te njegov rang i defekt.

(10) 2. Metodom najmanjih kvadrata odredite aproksimativno rješenje sustava jednadžbi:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 0 \\ 3x & + & y & = & -3 \end{array} \right. .$$

(10) 3. (a) Precizno definirajte kanonski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$, te pokažite da on zadovoljava svojstva simetrije i stroge pozitivnosti.

(b) Neka je $\big(V, (\cdot \mid \cdot)\big)$ bilo koji realan unitaran prostor i neka je $\|\cdot\|$ pripadna norma na V. Ako su $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ normirani vektori takvi da su svaka dva međusobno okomita, izračunajte broj $\|v_1 - 2v_2 + 3v_3 - 4v_4\|$.

(10) 4. (a) Neka je $\big(V, (\cdot \mid \cdot)\big)$ neki kompleksan unitaran prostor i neka je $\|\cdot\|$ pripadna norma. Pokažite da za bilo koje vektore $x, y \in V$ i bilo koje kompleksne brojeve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ čija je apsolutna vrijednost $|\alpha| = |\beta| = 1$ imamo jednakost

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 + \|\alpha x - \beta y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(b) Neka je $\big(U, (\cdot \mid \cdot)\big)$ neki realan unitaran prostor, neka je $\|\cdot\|$ pripadna norma i neka su $w, z \in U$ dva vektora. Dokažite da je $\|w\| = \|z\|$ ako i samo ako je $\|aw + bz\| = \|bw + az\|$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

(10) 5. Neka su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_1^2 = j + a_j^2$, za svaki $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Definirajmo $n \times n$ matricu $X = (x_{ij})$, za $n \geq 3$, koja je definirana na sljedeći način. Prvi redak matrice X je oblika $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n)$; tj., $x_{1j} = a_j$ za sve $1 \leq j \leq n$. Zadnji redak matrice X je oblika $(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)$; tj., $x_{nj} = a_{n+1-j}$ za sve $1 \leq j \leq n$. Još imamo $x_{jj} = 1$, za sve $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, a na svim ostalim mjestima su nule. Izračunajte determinantu matrice X, i posebno determinantu od X kada je $n = 17$.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, ukoliko se to posebno ne traži. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!