Zadatak:	1	2	3	4	5	$\sum$
Bodovi:	10	10	10	10	10	50
Osvojeni bodovi:						

JMBAG: ______________ IME I PREZIME: __________________________

Linearna algebra 1 - 2. kolokvij

10.02.2023.

(10) 1. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_3 - x_4, -3x_1 - x_2 - x_3 + x_4, 0, -4x_1 - 2x_2).$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^4$, jednu bazu jezgre operatora A te njegov rang i defekt.

(10) 2. Metodom najmanjih kvadrata odredite aproksimativno rješenje sustava jednadžbi:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 6 \end{array} \right. .$$

(10) 3. (a) Precizno iskažite teorem o Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti, za proizvoljan (realan ili kompleksan) unitaran prostor. Zatim detaljno pokažite da za dva linearno nezavisna vektora v i w u realnom unitarnom prostoru $\big(V, (\cdot \mid \cdot)\big)$, za pripadnu normu $\|\cdot\|$ vrijedi (stroga) nejednakost $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$.

(b) Neka je $\big(V, (\cdot \mid \cdot)\big)$ kompleksan unitaran prostor, neka je $\|\cdot\|$ pripadna norma na V i neka je $v \in V$ neki vektor. Postoji li barem jedan vektor $x \in V$ za koji vrijede jednakosti $\|v\| = \|v + ix\| = \|v - ix\|$? ($i \in \mathbb{C}$ označava imaginarnu jedinicu.) Ako da, nađite sve takve vektore $x \in V$.

(10) 4. (a) Precizno definirajte pojmove ortonormiranog skupa vektora i ortonormirane baze u konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru. Zatim precizno iskažite teorem o Gram-Schmidtovom postupku ortonormiranja skupa vektora.

(b) Neka je $\big(V, (\cdot \mid \cdot)\big)$ konačno dimenzionalan realan unitaran prostor i neka je $W \neq V$ neki njegov potprostor dimenzije barem 1. Definirajmo $Z \subseteq V$ kao skup svih vektora $v \in V$ takvih da je $(v|w) = 0$ za svaki normiran vektor $w \in W$. Je li Z nužno potprostor od V? Ako da, izračunajte dimenziju od $W \cap Z$.

(10) 5. Neka je A realna $n \times n$ matrica, za $n > 2$ neparan broj, i neka su sa $s_1, s_2, \ldots, s_n$ označeni stupci te matrice. Pretpostavimo da je determinanta od A jednaka 1. Zatim definirajmo matricu B koja je dobivena iz A na sljedeći način. Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je j-ti stupac u B jednak $s_j - j(-1)^j s_n$, a n-ti stupac u B jednak je zbroju svih stupaca u A. Izračunajte determinantu matrice B, i posebno to napravite za $n = 33$.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! Posebno, sve teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, ukoliko se to posebno ne traži. Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!