JMBAG: ____________________ IME I PREZIME: ______________________________

Linearna algebra 1 - 2. kolokvij (09. 02. 2024.)

(10) 1. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearan operator definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - 2x_4, x_2 + 2x_4, x_1 - 4x_4).$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^4$, izračunajte jezgru operatora A i nađite jednu njezinu bazu, te odredite rang i defekt od A.

(10) 2. Metodom najmanjih kvadrata odredite aproksimativno rješenje sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 0 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

Posebno porecizno objasnite što je aproksimativno rješenje danog sustava.

(10) 3. (a) Precizno definirajte kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$ te posebno dokažite da za njega vrijedi stroga pozitivnost.

(b) Definirajmo preslikavanje $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$\langle (x_1, x_2) \mid (y_1, y_2) \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Je li $\mathbb{R}^2$ uz $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ realan unitaran prostor? (Provjerite svako svojstvo skalarnog produkta!)

(10) 4. Gledajmo $\mathbb{R}^2$ kao unitaran prostor snabdjeven kanonskim skalarnim produktom. Ako neki takvi postoje, odredite sve parove vektora (x, y), gdje su $x, y \in \mathbb{R}^2$ i zadovoljavaju sljedeća četiri uvjeta: (1) norma vektora x jednaka je $2\sqrt{2}$; (2) skalarni produkt vektora $x - y$ i vektora $x + y$ jednak je 6; (3) vektor $2x + 3y$ jednak je $(1, 1)$; (4) vektor x okomit je na vektor $(-5, 5)$.

(10) 5. Za $n \geq 2$ neka je matrica $A_n = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ takva da na prvih $n + 1 - i$ mjesta u i-tom retku ima svuda 1, a na svim ostalim mjestima su nule; tj., imamo $a_{i,1} = a_{i,2} = \cdots = a_{i,n+1-i} = 1$ i $a_{i,k} = 0$ za svaki $k > n + 1 - i$. Odredite determinantu matrice A_n u ovisnosti o broju n; i posebno odredite $\det A_{333}$.

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori tipa "da" ili "ne", bez obrazloženja, nose 0 bodova.) Posebno, sve pomoćne teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, osim ako se samom formulacijom zadatka to zahtijeva. (Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!