RJEŠENJA: LA 2, 1. kolokvij, (09.05.2025.)

Zad. 1 *Neka je $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ baza od $\mathbb{R}^3$, gdje su vektori $b_1 = (1,1,0)$, $b_2 = (0,1,1)$ i $b_3 = (1,1,1)$. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi $\mathcal{E}$ dan s $A(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Odredite matrični prikaz operatora A u bazi $\mathcal{B}$ i zatim izračunajte determinantu te matrice. Je li operator A regularan?*

Rješenje. **(1 bod)** U standardnoj notaciji, vrijedi

$$A(\mathcal{B}) = I(\mathcal{B}, \mathcal{E})A(\mathcal{E})I(\mathcal{E}, \mathcal{B}).$$

(4 boda) Također, imamo

$$I(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = I(\mathcal{E}, \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1 boda) Sada računamo

$$A(\mathcal{B}) = I(\mathcal{B}, \mathcal{E})A(\mathcal{E})I(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(3 boda) Ili računanjem, ili koristeći činjenicu da je $\det A(\mathcal{B}) = \det A(\mathcal{E})$, dobivamo

$$\det A(\mathcal{B}) = -2 \neq 0$$

(1 bod) zbog čega je A regularan.

Zad. 2 *Neka su dane matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3x \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, gdje je $x \in \mathbb{R}$ parametar. Odredite sve vrijednosti x za koje je istovremeno BA singularna matrica, $\det(AB) = \det(AC)$ i $\det(ABABAB) = 0$.*

Rješenje. **(2 boda)** Direktnim računom dobivamo

$$AC = \begin{bmatrix} 3x & x+2 \\ 2x & x \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} x-2 & 5x \\ 0 & 3x \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -x \\ 0 & 3x & 0 \\ 2 & 3 & x \end{bmatrix}.$$

(2 boda) Opet, računamo

$$\det(AC) = x^2 - 4x, \quad \det(AB) = 3x^2 - 6x, \quad \det(BA) = 0.$$

Dakle, BA je singularna za sve $x \in \mathbb{R}$. **(1 bod)** Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema,

$$\det(ABABAB) = \det(AB)^3$$

pa je $\det(ABABAB) = 0$ ako i samo ako je $\det(AB) = 0$. **(2 boda)** To znači

$$0 = \det(AB) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

pa je $x = 0$ ili $x = 2$.

(2 boda) Naposljetku,

$$\det(AB) = \det(AC) \iff x^2 - 4x = 3x^2 - 6x \iff 2x^2 - 2x = 0$$

što znači da je $x = 0$ ili $x = 1$.

(1 bod) Dakle, vidimo da je jedini x koji zadovoljava sva tri uvjeta $x = 0$.

Zad. 3

(a) *Precizno definirajte pojam regularne matrice u $M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Ukoliko imamo konačno mnogo regularnih matrica $C_1, \ldots, C_k \in M_n(\mathbb{R})$, mora li nužno produkt svih tih matrica u bilo kojem poretku također biti regularna matrica?*

(b) *Neka su V i W konačno dimenzionalni realni vektorski prostori i neka je $f : V \to W$ surjektivan linearan operator koji nije regularan. Je li moguće da dimenzija od W bude veća negoli dimenzija od V? Je li moguće da dimenzije prostora V i prostora W budu jednake?*

Rješenje. (a) **(1 bod)** Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je regularna, ili invertibilna, ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ t.d. je $AB = I = BA$; gdje je $I \in M_n(\mathbb{R})$ jedinična matrica. Takva matrica B je jedinstvena i standardno se označava s A^{-1}.

(3 boda) Neka je $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}$, pa gledajmo matricu $M := C_{i_1} C_{i_2} \cdots C_{i_k}$; tj., M je "produkt C_j-ova u nekom poretku". Jer je svaka matrica C_j regularna, za nju postoji njoj inverzna matrica C_j^{-1}. Tada definirajmo matricu $X := C_{i_k}^{-1} C_{i_{k-1}}^{-1} \cdots C_{i_1}^{-1}$ te, znajući da je množenje matrica asocijativno, primijetimo kako je

$$\begin{aligned} MX &= (C_{i_1} C_{i_2} \cdots C_{i_k})(C_{i_k}^{-1} C_{i_{k-1}}^{-1} \cdots C_{i_1}^{-1}) = (C_{i_1} \cdots C_{i_2} \cdots C_{i_{k-1}})\,(C_{i_k} C_{i_k}^{-1})\,(C_{i_{k-1}}^{-1} \cdots C_{i_1}^{-1}) \\ &= (C_{i_1} \cdots C_{i_2} \cdots C_{i_{k-1}})\; I\; (C_{i_{k-1}}^{-1} \cdots C_{i_1}^{-1}) = \cdots = I. \end{aligned}$$

Analogno je i $XM = I$, i zato je $X = M^{-1}$; tj., M je regularna matrica.

(b) **(2 boda)** Po jednom teoremu s predavanja znamo da ako je $f : V \to W$ lin. operator koji je surjektivan, onda je $\dim W \leq \dim V$. Dakle, posebno nije moguće da bude $\dim W > \dim V$.

(4 boda) Jer f nije regularan operator, ali jest surjektivan, zaključujemo da on nije injektivan operator. Onda, po istom teoremu s predavanja, znamo da je jezgra $\ker f \neq \{0_V\}$; tj., defekt $d(f) > 0$. Kako je f surjekcija imamo da je rang $r(f) = \dim W$. Po *Teoremu o rangu i defektu* je $\dim V = d(f) + \dim W$. Zaključujemo da je nužno $\dim W < \dim V$.

Zad. 4 *Neka je S skup svih matrica $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1/x^2 & 0 \\ 0 & y & x \end{pmatrix}$, gdje su $x, y \in \mathbb{Q}$ i $x \neq 0$. Je li S podgrupa grupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$? Ako da, posebno izračunajte inverz matrice A dane kao gore.*

Rješenje. **(1 bod)** Prvo primijetimo da je A donje trokutasta matrica pa je $\det A = x \cdot (1/x^2) \cdot x = 1$ i zato je A regularna matrica iz čega vidimo da je $S \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

(2 boda) Tvrdimo da je $S \leq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, podgrupa. (Zapravo je $S \leq \mathrm{SL}_3(\mathbb{Q})$.) Po def. podgrupe, moramo pokazati da za bilo koje $A, B \in S$ imamo $AB \in S$ te $A^{-1} \in S$.

(2 boda) Za A kao gore i $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in S$ je $AB = \cdots = \begin{pmatrix} xa & 0 & 0 \\ 0 & 1/(xa)^2 & 0 \\ 0 & y/a^2 + xb & xa \end{pmatrix}$.
Kako je očito $xa \in \mathbb{Q}$ i $xa \neq 0$, te isto tako $y/a^2 + xb \in \mathbb{Q}$ budući su $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$, zaključujemo da je $AB \in S$.

(3 boda) Sada recimo da je $B \in S$ matrica kao gore i da je ona zadana. Jer je ona regularna, ona sigurno ima inverz u grupi $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$; ali nas zanima je li taj inverz štoviše u S! Dakle ako bi matrica A, napisana kao gore, bila inverz od B onda bismo imali $AB = I$ i onda posebno $xa = 1$ i $y/a^2 + xb = 0$. Odavde odmah dobivamo da je $x = 1/a$ i zatim $y = -ab$. Znači da je
$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -ab & 1/a \end{pmatrix}$.

(2 boda) Ako stavimo $c = 1/a$ i $d = -b/c$, što su očito racionalni brojevi, zadnje dobivenu matricu možemo zapisati kao $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$. Očito imamo da je $A^{-1} \in S$. Tako smo pokazali da je doista S podgrupa od $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Napomena. U Zad. 4 uz zaključke da je produkt dvije matrice iz S također iz S, te da je inverz matrice iz S također iz S, nužno je bilo komentirati zašto su svi matrični koeficijenti iz dobivenih matrica racionalni brojevi. Bez toga gubi se jedan bod kod produkta matrica te dva boda kod invertiranja. Nadalje, moglo se je i direktno (a ne preko "kriterija podgrupe", kako je gore napravljeno) pokazivati da je S grupa s obzirom na standardno množenje matrica. No u tom slučaju nužno je komentirati zašto vrijedi asocijativnost množenja u S (1 bod) te zašto je jedinična matrica I iz S (1 bod).

Zad. 5 *Neka su X i Y konačno dimenzionalni realni vektorski prostori te neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ linearni operatori. Pretpostavimo da postoje injektivan operator $A : X \to X$ i surjektivan operator $B : Y \to Y$ takvi da je $g \circ f = A$ i $f \circ g = B$. Jesu li A i B oba nužno regularni operatori? (Svoju tvrdnju treba detaljno dokazati/obrazložiti.)*

Rješenje.
1. način. (Pokazuje više; da su nužno i f i g izomorfizmi, tj. reg. operatori.)
(4 boda) Iz jednakosti $g \circ f = A$ i činjenice da je A injekcija zaključujemo da je nužno f injekcija. Naime, ako bi za neke $x_1 \neq x_2$ iz X bilo $f(x_1) = f(x_2)$, onda bismo imali i $A(x_1) = A(x_2)$, što bi značilo da A nije injekcija.

Nadalje iz jednakosti $f \circ g = B$ i činjenice da je B surjekcija zaključujemo da je nužno i f surjekcija. Naime, ako bismo za sliku od f imali $\mathrm{im}\, f \neq Y$, onda bi bilo

$$\mathrm{im}\,(f \circ g) = (f \circ g)(Y) \subseteq f(X) = \mathrm{im}\, f \subset Y,$$

dok zbog surjektivnosti od B i jednakosti $f \circ g = B$ zaključujemo da je $\mathrm{im}\, B = \mathrm{im}\,(f \circ g) = Y$. Zaključak: f je bijektivan lin. operator; tj. izomorfizam.

(4 boda) Sada jer je f izomorfizam, postoji inverzni lin. operator $f^{-1} : Y \to X$. I onda iz $g \circ f = A$ slijedi da je $g = A \circ f^{-1}$. Jer je A injekcija, iz zadnje jednakosti odmah zaključujemo da je nužno i g injekcija. Isto tako iz $f \circ g = B$ imamo $g = f^{-1} \circ B$. Jer je B surjekcija, odmah zaključujemo da je nužno i g surjekcija. Dakle je i g izomorfizam.

(2 boda) Konačno, kako su f i g oba izomorfizmi, znajući da je kompozicija izomorfizama također izomorfizam, odmah slijedi da su i A i B isto oba izomorfizmi.

2. način.
Na predavanjima smo dokazali sljedeći rezultat: *Ako je V kon. dim. vektorski prostor i $\alpha : V \to V$ neki lin. operator, onda je ekvivalentno:* (a) *α je injekcija;* (b) *α je surjekcija;* (c) *α je bijekcija.*

Sada, za $\alpha \equiv A : X \to X$ koji je injekcija po gornjoj tvrdnji zaključujemo odmah da je to i izomorfizam. Analogno iz toga da je $\alpha \equiv B : Y \to Y$ surjekcija opet po gornjoj tvrdnji zaključujemo da je to i izomorfizam.

Važno. Primijetimo kako nam za ovaj drugi dokaz uopće ne trebaju nikakve informacije o f i g, osim toga da su to lin. operatori pa onda po dokazanom na predavanjima znamo da su i njihove kompozicije $g \circ f = A$ i $f \circ g = B$ također linearni operatori; što je bitna činjenica za ovaj drugi način rješavanja. I to pri rješavanju treba posebno naglasiti (za 4 **boda**).

Napomena. U Zad. 5 sve treba biti sasvim precizno napisano te jasno i korektno argumentirano da bi se dobilo navedene bodove!