

Linearna algebra 1 - 1. kolokvij (14. 12. 2022.)

- (10) 1. U ovisnosti o realnom parametru
- λ
- , odredite rješenje sustava

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

- (10) 2. Što dobijemo ako na ravninu

$$\mathcal{M} \equiv \{(-1, 1, 1) + t(0, \sqrt{2}, 0) + s(1, 0, -1) \mid t, s \in \mathcal{R}\}$$

djelujemo operatorom rotacije oko y -osi za kut $\pi/4$, a zatim operatorom projekcije na xz -ravninu?

- (10) 3. (a) Precizno opišite tri tipa elementarnih transformacija na stupcima (ili retcima) matrica te za svaki tip elementarne transformacije navedite i njoj inverznu (ili suprotnu) elementarnu transformaciju.

- (b) Neka je matrica
- $\tilde{A}$
- dobivena iz matrice
- $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$
- konačnim nizom elementarnih transformacija na njezinim stupcima. Ako su stupci matrice
- A
- linearno nezavisni kao vektori u
- $\mathbb{R}^m$
- , jesu li nužno i stupci matrice
- $\tilde{A}$
- linearno nezavisni?

- (10) 4. Neka su preslikavanja
- $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- i
- $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- definirana ovako:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_4, x_2 + 2x_3 + 2, 2x_1 + x_3 + 1) \quad \text{i} \quad g(y_1, y_2, y_3) := (-y_1, y_2 - 2y_3).$$

- (a) Za svako od preslikavanja
- f
- i
- g
- utvrdite je li ono surjektivan linearan operator.

- (b) Definirajmo podskup
- $S := \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- od
- $\mathbb{R}^2$
- i zatim
- C
- kao skup svih vektora
- $v \in \mathbb{R}^4$
- takvih da je
- $g(f(v)) \in S$
- . Je li
- C
- potprostor od
- $\mathbb{R}^4$
- ? Ako da, nađite mu neku bazu i odredite mu dimenziju.

- (10) 5. Neka su
- $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$
- dva lin. nezavisna vektora.

- (a) Postoji li beskonačan skup vektora
- $X = \{x_n \in \mathbb{R}^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- takvih da je svaka trojka vektora
- $\{v_1, x_m, x_n\}$
- , gdje su
- $m, n \in \mathbb{N}$
- međusobno različiti, linearno nezavisna?

- (b) Postoji li beskonačan skup vektora
- $X = \{x_n \in \mathbb{R}^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- takvih da za svake
- $m, n \in \mathbb{N}$
- međusobno različite budu istovremeno i trojka vektora
- $\{v_1, x_m, x_n\}$
- lin. nezavisna i trojka vektora
- $\{v_2, x_m, x_n\}$
- lin. nezavisna?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori “da” ili “ne”, bez obrazloženja, nose 0 bodova.) Posebno, sve pomoćne teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, osim ako se samom formulacijom zadatka to zahtijeva. (Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati! Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!