

Linearna algebra 1 - 1. kolokvij (08. 12. 2023.)

- (10) 1. U ovisnosti o realnom parametru
- λ
- , odredite rješenje sustava

$$\begin{cases} x_1 & & + 2x_3 & + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - x_2 & + 3x_3 & - 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + x_2 & + x_3 & + \lambda x_4 & = & 3 \\ & - x_2 & + 2x_3 & - x_4 & = & -1 \end{cases}.$$

- (10) 2. Što dobijemo ako na ravninu

$$\mathcal{M} \equiv \{(-2, 1, 1) + t(0, 1, 1) + s(1, 0, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

djelujemo operatorom rotacije oko x -osi za kut $\frac{3\pi}{4}$, a zatim operatorom projekcije na yz -ravninu?

- (10) 3. Neka su
- V
- i
- W
- realni vektorski prostori i neka je
- $f : V \rightarrow W$
- linearan operator. Definiramo jezgru operatora
- f
- kao
- $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$
- , gdje je
- 0_W
- nul-vektor prostora
- W
- .

(a) Dokažite da ako je f injektivno preslikavanje, onda je jezgra $\ker f$ jednaka trivijalnom potprostoru $\{0_V\}$ od V , gdje je 0_V nul-vektor u V . Vrijedi li i obratno; tj., je li f nužno injektivan linearan operator ukoliko je $\ker f = \{0_V\}$?

(b) Pretpostavimo da postoji neki vektor $w_0 \in W$, različit od nul-vektora 0_W od W , za koji postoji jedinstven vektor $v_0 \in V$ takav da je $f(v_0) = w_0$. Je li f nužno injektivan linearan operator?

- (10) 4. Definirajmo preslikavanje
- $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- s
- $A(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_4, x_2 + x_3, x_1)$
- i podskup
- $P := \{(c, a, a + c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$
- od
- $\mathbb{R}^3$
- .

(a) Je li A linearan operator? Je li P vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3$?

(b) Je li skup $\Omega := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid A(v) \in P\}$ potprostor od $\mathbb{R}^4$? Ako da, odredite mu dimenziju i nađite neku bazu.

- (10) 5. Neka je
- V
- bilo koji vektorski prostor i neka je
- $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$
- neki skup linearno nezavisnih vektora. Definirajmo nove vektore
- $x_i := v_i + v_{i+1}$
- za
- $i = 1, \dots, k-1$
- te još vektor
- $x_k := v_1 + v_2 + \dots + v_k$
- . Ako je
- k
- neparan broj veći od 4, je li
- $\{x_1, \dots, x_k\}$
- nužno skup linearno nezavisnih vektora?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori tipa “da” ili “ne”, bez obrazloženja, nose 0 bodova.) Posebno, sve pomoćne teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, osim ako se samom formulacijom zadatka to zahtijeva. (Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!