

Linearna algebra 1 - 1. kolokvij (06. 12. 2024.)

- (10) 1. Nađite skup svih rješenja
- $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$
- sustava

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

i zatim nađite ono specijalno rješenje koje zadovoljava uvjet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

- (10) 2. Što dobijemo ako na ravninu

$$\mathcal{M} = \{(1, 0, 1) + \lambda(2, 3, 2) + \mu(1, 1, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

djelujemo operatorom rotacije oko x -osi za kut $\pi/4$, a zatim operatorom projekcije na xz -ravninu?

- (10) 3. Neka je dana matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ i onda definirajmo U kao vektorski potprostor od $\mathbb{R}^4$ koji se sastoji od svih vektora $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ takvih da je $Ax = (0, 0)$. (Ovdje Ax jest standardno množenje matrice A i vektora x .) Nađite neku bazu $\mathcal{B}$ od U i detaljno objasnite zašto je to doista baza. Je li skup vektora $\mathcal{B} \cup \{e_1, e_2\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$? (Ovdje su e_1 i e_2 standardni kanonski vektori.)

- (10) 4. Neka je
- V
- realan vektorski prostor.

(a) Neka je $S \subseteq V$ neki neprazan skup vektora, moguće i beskonačno mnogo njih. Precizno definirajte linearnu ljusku razapetu sa S . Zatim detaljno dokažite da je ta linearna ljuska vektorski potprostor od V .

(b) Neka je W neki potprostor od V i neka je $v_0 \in V$ neki vektor različit od nul-vektora. Definirajmo Ω kao skup svih vektora iz V oblika $\lambda(w + v_0)$, za proizvoljni vektor $w \in W$ i proizvoljan skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Je li Ω vektorski potprostor od V ?

- (10) 5. Neka su V , W i X konačno-dimenzionalni realni vektorski prostori te neka je $f : V \rightarrow W$ surjektivni linearni operator. Pretpostavimo da je $g : W \rightarrow X$ neko preslikavanje takvo da je kompozicija $g \circ f$ linearni operator iz V u X . Mora li preslikavanje g nužno biti linearni operator?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori tipa “da” ili “ne”, bez obrazloženja, nose 0 bodova.) Posebno, sve pomoćne teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, osim ako se samom formulacijom zadatka to zahtijeva. (Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!