

Linearna algebra 1 - pismeni ispit, 4. rok (10.09.2025.)

- (8) 1. Neka je $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ skup linearno nezavisnih vektora u konačno dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru V . Definirajmo vektore $x_1, \dots, x_n \in V$ tako da stavimo $x_k = v_k - v_{k+1}$ za $k = 1, 2, \dots, k-1$ te $x_n = v_n$. Je li $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ nužno skup linearno nezavisnih vektora iz V ?
- (10) 2. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ linearni operator definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 - 4x_4, x_2 + 2x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_4, -x_1 - 2x_2).$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^4$, nađite jednu bazu jezgre operatora A , te izračunajte njegov rang i defekt.

- (11) 3. Odredite sve vrijednosti $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je rang matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & \alpha & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ najveći mogući i zatim sve vrijednosti $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je rang od A najmanji mogući.
- (10) 4. Postoje li neki par realnih brojeva (α, β) takvih da je preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definirano s $f(x, y, z) := (-x + \alpha(y^2 + 1) - 2, z + \beta xy)$, linearan operator? Ako da, nađite sve takve parove (α, β) .
- (11) 5. Definirajmo preslikavanje $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$\langle (x_1, y_1) | (x_2, y_2) \rangle := 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2.$$

Je li $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ realan unitaran prostor?

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori tipa “da” ili “ne”, bez obrazloženja, nose 0 bodova.) Posebno, sve pomoćne teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, osim ako se samom formulacijom zadatka to zahtijeva. (Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!