

Linearna algebra 1 - pismeni ispit, 3. rok (29.08.2024.)

- (8) 1. U ovisnosti o realnom parametru
- λ
- riješite sustav jednažbi

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 7x_2 + \lambda x_3 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

- (9) 2. Za realan broj
- α
- definirajmo operator
- $A_\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$
- s

$$A_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_3 - 2x_4, \alpha x_1 + 2x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Odredite skup svih vrijednosti α za koje koje rang $r(A_\alpha)$ poprima najmanju moguću vrijednost, i izračunajte taj najmanji mogući rang.

- (10) 3. Neka su
- V
- i
- W
- realni vektorski prostori i neka je
- $f : V \rightarrow W$
- linearan operator. Neka su
- $X \leq V$
- i
- $Y \leq W$
- neki potprostori. Definiramo
- A
- kao skup svih vektora
- $v \in V$
- takvih da je
- $f(v) \in Y$
- . Isto tako definiramo
- B
- kao skup svih
- $w \in W$
- takvih da postoji neki
- $x \in X$
- takav da je
- $f(x) - w$
- vektor iz
- Y
- . Je li
- A
- vektorski potprostor od
- V
- ? Je li
- B
- vektorski potprostor od
- W
- ?

- (12) 4. Neka je dana matrica
- $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$
- .

- (a) Precizno definirajte pojmove slike i nul-potprostora matrice A . Objasnite zašto su ti skupovi vektorski prostori a zatim precizno iskažite teorem o rang i defektu za matrice.
- (b) Neka je $\tilde{A}$ matrica dobivena iz A nizom elementarnih transformacija na stupcima. Jesu li slika od A i slika od $\tilde{A}$ nužno jednake? Jesu li nul-potprostor od A i nul-potprostor od $\tilde{A}$ nužno jednaki?
- (c) Mijenja li se rang matrice A ukoliko na njoj izvodimo elementarne transformacije na retcima? Odgovor detaljno objasnite.

- (11) 5. Za
- $n \geq 2$
- neka je matrica
- $X_n = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$
- takva da je
- $x_{ii} = 1$
- , za svaki
- $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- . Nadalje je i
- $x_{i,i+1} = 1 = x_{i+1,i}$
- , za sve
- $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$
- . Svi ostali matrični koeficijenti jednaki su 0. Izračunajte determinantu matrice
- A_n
- u ovisnosti o broju
- n
- . Posebno izračunajte
- $\det A_{10}$
- .

Napomena. Dozvoljeno je korištenje SAMO pribora za pisanje i brisanje! Sve svoje tvrdnje DETALJNO obrazložite i/ili dokažite! (Odgovori tipa “da” ili “ne”, bez obrazloženja, nose 0 bodova.) Posebno, sve pomoćne teoreme i ostale tvrdnje koje koristite, i koje su dokazane na predavanjima, precizno iskažite; ali iste ne morate dokazivati, osim ako se samom formulacijom zadatka to zahtijeva. (Sve eventualne druge tvrdnje koje koristite morate i dokazati!) Rješenje svakog zadatka OBAVEZNO pišite na zasebnom papiru! Na svakom papiru na kojem pišete ČITKO napišite ime i prezime!