

RJEŠENJA: LA 1, 2. kolokvij, (06.02.2026.)

Zad. 1 Neka je $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ linearni operator definiran s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) := (2x_1 + x_2 - x_4, x_1 + x_3 + x_4, 3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4).$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^4$, nađite neku bazu jezgre operatora A te izračunajte njegov rang i defekt.

Rješenje. (2 boda) Matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi od $\mathbb{R}^4$ je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(3 boda) Odredimo jezgru operatora A . Vrijedi $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \text{Ker} A$ akko $Ax = 0$. Rješavanjem

homogenog sustava $Ax = 0$ dobivamo $x_1 = -x_3 - x_4, x_2 = 2x_3 + 3x_4$.

(1 bod) Dakle, $x = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(1 bod) Označimo $a_1 = (-1, 2, 1, 0), a_2 = (-1, 3, 0, 1)$. Tada je $\{a_1, a_2\}$ jedna baza za jezgru operatora A .

(1 bod) Iz prethodnog slijedi da je defekt $d(A) = 2$.

(2 boda) Po Teoremu o rang i defektu slijedi da je rang $r(A) = 4 - 2 = 2$.

Zad. 2 Metodom najmanjih kvadrata odredite aproksimativno rješenje sustava jednažbi:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}.$$

Rješenje. (2 boda) Označimo $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i neka je W potprostor od $\mathbb{R}^3$

razapet s a_1 i a_2 . Sada dani sustav možemo pisati kao $xa_1 + ya_2 = v$. Budući da on nema rješenje, slijedi $v \notin W$. Aproksimativno rješenje sustava će biti $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je vektor $xa_1 + ya_2$ najbolja aproksimacija vektora v u prostoru W .

(2 boda) Kako je $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$, postoji jedinstven $z \in W^\perp$ takav da je $v = xa_1 + ya_2 + z$. Sada računamo:

$$2 = \langle v | a_1 \rangle = \langle xa_1 + ya_2 + z | a_1 \rangle = 3x - y \quad (2 \text{ boda})$$

$$2 = \langle v | a_2 \rangle = \langle xa_1 + ya_2 + z | a_2 \rangle = -x + 3y \quad (2 \text{ boda}).$$

(2 boda) Odatle dobivamo $x = 1, y = 1$.

Zad. 3 Neka su V, W i X konačno dimenzionalni realni vektorski prostori te neka su $f: V \rightarrow W$ i $g: W \rightarrow X$ linearni operatori.

- (a) *Detaljno pokažite da za jezgru od f i jezgru kompozicije $g \circ f$ vrijedi da uvijek jedan od ta dva skupa sadrži onaj drugi. (Napišite točno koja je inkluzija među tim skupovima.)*
 (b) *Je li moguće da rang operatora $g \circ f$ bude strogo veći od ranga operatora f ? Ako da, nađite neke konkretne prostore V , W i X te linearne operatore f i g za koje navedeno vrijedi.*

Rješenje. (a) **(2 boda)** Za $f : V \rightarrow W$ i $h := g \circ f : V \rightarrow X$ tvrdimo da uvijek vrijedi

$$\ker f \subseteq \ker h. \quad (\diamond)$$

(3 boda) Naime, za svaki $v \in \ker f$ je $v \in V$ t.d. $f(v) = 0_W$. Ali onda imamo

$$h(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(0_W) = 0_X,$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili dobro poznatu činjenicu da "lin. operator preslikava nul-vektor domene u nul-vektor kodomene". Zaključujemo da je $v \in \ker h$; i onda $(\diamond)$ slijedi.

(a) **(2 boda)** Po *Teoremu o rangui i defektu* za lin. operatore znamo da je

$$d(f) + r(f) = \dim V = d(h) + r(h) \implies r(f) - r(h) = d(h) - d(f).$$

(3 boda) Ali gore dokazana inkluzija $(\diamond)$ implicira da je $d(f) \leq d(h) \Leftrightarrow d(h) - d(f) \geq 0$. I onda slijedi

$$r(f) - r(h) \geq 0 \iff r(f) \geq r(h).$$

Zaključujemo da rang $r(g \circ f)$ **ne može** biti strogo veći od ranga $r(f)$.

Zad. 4 Neka je $(V, (\cdot | \cdot))$ konačno dimenzionalan realan unitaran prostor.

- (a) *Neka je S neki potprostor od V . Precizno definirajte pojam ortogonalnog komplementa od S u V . Je li taj ortogonalni komplement potprostor od V ? Ako da, detaljno to dokažite i zatim odredite sve vektore koji se nalaze i u S i u njegovom ortogonalnom komplementu.*
 (b) *Ako su S i T potprostori od V je li suma ortogonalnog komplementa od S i ortogonalnog komplementa od T nužno sadržana u ortogonalnom komplementu potprostora $S \cap T$?*
 (c) *Gledajmo $\mathbb{R}^4$ kao unitaran prostor s kanonskim skalarnim produktom i neka je W njegov potprostor razapet vektorima $(1, -1, 0, 0)$ i $(0, 1, 1, 0)$. Nađite neku ortonormiranu bazu ortogonalnog komplementa od W u $\mathbb{R}^4$. Kolika je dimenzija toga ortogonalnog komplementa?*

Rješenje. (a) **(1 bod)** Ortogonalni komplement $S^\perp$ definiran je kao

$$S^\perp = \{v \in V \mid (v|x) = 0, \forall x \in S\}.$$

(1 bod) Tvrdimo da je $S^\perp \leq V$, vekt. potprostor. Naime, ako su $v_1, v_2 \in S^\perp$, onda je $(v_1|x) = 0 = (v_2|x)$ za svaki $x \in S$. Te onda za bilo koje $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ imamo da je i

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2 | x) = a_1 (v_1 | x) + a_2 (v_2 | x) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0, \quad \forall x \in S.$$

Po *kriteriju potprostora* slijedi da je doista $S^\perp \leq V$.

(1 bod) Tvrdimo da je $S \cap S^\perp = \{0_V\}$. Naime ako je $v \in S \cap S^\perp$, onda zbog $v \in S^\perp$ imamo $(v|x) = 0$, za svaki $x \in S$. Ali kako je $x = v \in S$, onda je posebno $(v|v) = 0$, te zatim koristeći strogu pozitivnost skalarnog produkta zaključujemo da je nužno $v = 0_V$.

(b) **(4 boda)** Tvrdimo da je nužno $S^\perp + T^\perp \subseteq (S \cap T)^\perp$. (**Napomena.** Može se pokazati da štoviše imamo jednakost!) Naime, ako je $v \in S^\perp + T^\perp$, onda se po jednoj propoziciji s predavanja v može napisati kao $v = y + z$, za neki $y \in S^\perp$ i neki $z \in T^\perp$. Ali za $x \in S \cap T$ je onda $(y|x) = 0$, jer je posebno $x \in S$. Isto tako je $(z|x) = 0$, jer je posebno $x \in T$. Znači da je

$$(v|x) = (y + z|x) = (y|x) + (z|x) = 0 + 0 = 0, \quad \forall x \in S \cap T.$$

Po definiciji ortogonalnog komplementa imamo da je $v \in (S \cap T)^\perp$; i onda zbog proizvoljnosti v slijedi navedena inkluzija.

(c) **(2 boda)** Označimo $a := (1, -1, 0, 0)$ i $b := (0, 1, 1, 0)$. Onda je $x = (x_1, \dots, x_4) \in W^\perp$ ako i samo ako je $(x|a) = x_1 - x_2 = 0$ i $(x|b) = x_2 + x_3 = 0$. Slijedi:

$$x = (x_1, x_1, -x_1, x_4) = x_1(1, 1, -1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1).$$

Ako stavimo $c := (1, 1, -1, 0)$ i $d := (0, 0, 0, 1)$, onda je očito skup $\mathcal{B} := \{\frac{1}{\sqrt{3}}c, d\}$ jedna baza od $W^\perp$; i zato je $\dim W^\perp = 2$.

(1 bod) Štoviše, $\mathcal{B}$ je evidentno i ONB od $W^\perp$.

Zad. 5 Neka je n paran prirodan broj i neka je $A = (a_{ij})$ realna $n \times n$ matrica takva da je $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ ukoliko je $i + j \leq n + 1$ te $a_{ij} = 0$ ukoliko je $i + j > n + 1$. (Uočite oblik tih matrica za npr. $n = 2$ i $n = 4$.) U ovisnosti o broju n izračunajte determinantu matrice A .

Rješenje. (10 bod.) Neka je $n = 2m$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Ako u matrici A zamijenimo prvi i n -ti stupac, zatim 2. i $(n - 1)$ -vi stupac, i općenito j -ti i $(n - j)$ -ti stupac za $j = 1, \dots, m$, dobivenu matricu označimo s $\tilde{A}$. Kako smo napravili ukupno m zamjena, po pravilu “zamjenom dva stupca u matrici determinanta mijenja predznak”, slijedi $\det A = (-1)^m \det \tilde{A}$. Sad primijetimo da je $\tilde{A}$ gornje trokutasta matrica koja svuda na glavnoj dijagonali ima broj $(-1)^{2m+1} = -1$. I zato, po pravilu “determinanta trokutaste matrice računa se kao umnožak svih matičnih koeficijenata na glavnoj dijagonali” imamo da je $\det \tilde{A} = (-1)^n = (-1)^{2m} = 1$. Konačno slijedi

$$\det A = (-1)^m \det \tilde{A} = (-1)^m = (-1)^{n/2}.$$

Napomena. Gore napisana rješenja zadataka su jako detaljna, i glavni im je cilj pokazati studentu kako bi zapravo trebalo rješavati zadatke na kolokvijima (te na pismenim ispitima na preostala tri ispitna roka).