RJEŠENJA: LA 2, 1. kolokvij, (08.05.2026.)

Zad. 1 *Neka je $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ baza od $\mathbb{R}^3$, gdje su vektori $b_1 = (2,1,1)$, $b_2 = (-1,1,0)$ i $b_3 = (0,2,1)$. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi $\mathcal{E}$ dan s $A(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Odredite matrični prikaz operatora A u bazi $\mathcal{B}$ i zatim izračunajte determinantu te matrice. Je li operator A regularan?*

Rješenje. **(1 bod)** U standardnoj notaciji, vrijedi

$$A(\mathcal{B}) = I(\mathcal{B}, \mathcal{E}) A(\mathcal{E}) I(\mathcal{E}, \mathcal{B}).$$

(4 boda) Također, imamo

$$I(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = I(\mathcal{E}, \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1 bod) Sada računamo

$$A(\mathcal{B}) = I(\mathcal{B}, \mathcal{E}) A(\mathcal{E}) I(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3 boda) Ili računanjem, ili koristeći činjenicu da je $\det A(\mathcal{B}) = \det A(\mathcal{E})$, dobivamo

$$\det A(\mathcal{B}) = 6 \neq 0$$

(1 bod) zbog čega je A regularan.

Zad. 2 *Neka su dane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x-3 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}$, gdje je $x \in \mathbb{R}$ parametar. Odredite sve vrijednosti x za koje je istovremeno AB singularna matrica, $\det(BA) = \det(CA)$ i $\det((BA - I_2)^3) = 0$. Ovdje je I_2 jedinična 2×2 matrica.*

Rješenje. **(2 boda)** Direktnim računom dobivamo

$$AB = \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x-3 & 1 \\ x-2 & x-4 & 2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix}, CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

(2 boda) Opet, računamo

$$\det(BA) = x(x-2), \quad \det(CA) = x, \quad \det(AB) = 0.$$

Dakle, AB je singularna za sve $x \in \mathbb{R}$. **(1 bod)** Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema vrijedi

$$\det((BA - I_2)^3) = \det(BA - I_2)^3.$$

(2 boda) Nadalje,

$$\det((BA - I_2)^3) = \left(\det \begin{bmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-3 \end{bmatrix}\right)^3 = ((x-1)(x-3))^3.$$

Zato je $\det((BA - I_2)^3) = 0$ ako i samo ako je $x = 1$ ili $x = 3$.

(2 boda) Naposljetku,

$$\det(BA) = \det(CA) \iff x(x-2) = x \iff x^2 - 3x = 0$$

što znači da je $x = 0$ ili $x = 3$.

(1 bod) Dakle, vidimo da je jedini x koji zadovoljava sva tri uvjeta $x = 3$.

Zad. 3 *Odredite sve matrice* $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, *gdje su* $x, y \in \mathbb{Z}$, *takve da je za svaki prirodan broj* k *matrica* A^{4k} *gornje trokutasta te je trag matrice* A^6 *manji od* 500.

Rješenje. **(2 boda)** Računamo $A^2 = \begin{pmatrix} x^2+3 & 3(x+y) \\ x+y & y^2+3 \end{pmatrix}$ i zatim je posebno

$$A^4 = A^2\,A^2 = \begin{pmatrix} * & * \\ (x+y)(x^2+y^2+6) & * \end{pmatrix}.$$

(U trenutku nas ne zanimaju precizno napisani matrični koeficijenti označeni sa $*$; ali, jasno, oni se lako mogu izračunati!)

(3 boda) Da bi A^4 bila gornje trokutasta nužno je $x + y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -x$. (Primijetimo da je $x^2 + y^2 + 6 \geq 6$; i posebno je $x^2 + y^2 + 6 \neq 0$.) Znači da je $A^2 = \begin{pmatrix} x^2+3 & 0 \\ 0 & x^2+3 \end{pmatrix}$ i onda očito

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (x^2+3)^k & 0 \\ 0 & (x^2+3)^k \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(2 boda) Sada, po uvjetu zadatka imamo da je posebno $\mathrm{tr}(A^6) = 2(x^2+3)^3 < 500$.

(3 boda) Očito su $x \in \{-1, 0, 1\}$ dobri; jer je $2(1^2+3)^3 = 128 < 500$. Ali za $|x| \geq 2$ je

$$2(x^2+3)^3 \geq 2(2^2+3)^3 = 2 \cdot 7^3 = 14 \cdot 49 > 500;$$

i tako vidimo da su gornje tri vrijednosti za x jedine dobre. Dobivamo

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zad. 4 *Neka su* V *i* W *realni konačno dimenzionalni vektorski prostori i neka je* $f : V \to W$ *linearan operator.*

(a) *Pretpostavimo da je* $\mathcal{B}$ *neka baza prostora* V *te je skup* $\{f(v) \mid v \in \mathcal{B}\}$ *baza prostora* W. *Je li* f *nužno linearan izomorfizam? (Svoju tvrdnju detaljno dokažite!)*

(b) *Ako je* $S \subseteq V$ *neki skup izvodnica prostora* V *takav da je skup* $\{f(v) \mid v \in S\}$ *baza prostora* W, *je li* f *nužno linearna injekcija?*

Rješenje. (a) **(2 boda)** Neka je $n = \dim V$ i $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Jer je $\mathcal{C} := \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ baza od W, onda za proizvoljan $y \in W$ postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.d.

$$y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n).$$

Znači, za vektor $x := \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in V$ je $f(x) = y$. Zaključak: f je lin. surjekcija.

(3 boda) Neka je sada $x \in V$ t.d. je $f(x) = 0_W$; tj., $x \in \ker f$. Raspišimo x u bazi $\mathcal{B}$ kao $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, za neke $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Onda je

$$0_W = f(x) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n).$$

Ali jer je $\mathcal{C}$ baza od W (i posebno je to lin. nezavisan skup vektora) slijedi da je nužno $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, te onda $x = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0_V$. Zaključak: $\ker f = \{0_V\}$ i zato je f lin. injekcija a onda i lin. izomorfizam.

(b) **(5 bod.)** Neka je $\dim W = m$. Jer je skup $\mathcal{A} := \{f(v) | v \in S\}$ baza prostora W, onda je u njemu točno m vektora. Ali to znači da postoje vektori $v_1, \ldots, v_m \in S$ t.d. je

$$\mathcal{A} = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}.$$

No to dalje znači da je zapravo nužno $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. (Jer ako bi postojao još neki $\omega \in S$, različit od svakog v_i, onda bi posebno baza $\mathcal{A}$ sadržavala skup od $m+1$ vektora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n), f(\omega)\}$, što je nemoguće.)

Sada još primijetimo da je S i lin. nezavisan skup vektora. (Jer iz $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$ slijedi $0_W = f(0_V) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots \alpha_n f(v_n)$ i onda su nužno svi $\alpha_i = 0$.) Dakle, S je zapravo baza od V. Ali onda smo u uvjetima (a) dijela zadatka pa je f lin. izomorfizam te posebno i lin. injekcija.

Zad. 5 *Neka je M skup svih matrica oblika $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i a nije nula. Je li M podgrupa grupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$? Ako da, posebno izračunajte inverz gore dane matrice A i utvrdite je li M komutativna grupa.*

Rješenje. **(2 boda)** Za A kao u zadatku i $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \in M$ imamo da je produkt

$$AB = \begin{pmatrix} ax & ay + bx & az + cx^2 \\ 0 & ax & 0 \\ 0 & 0 & a^2x^2 \end{pmatrix}.$$

I očito, po definiciji skupa M, imamo da je $AB \in M$; tj., M je zatvoren za množenje.

(4 boda) Sada za danu matricu A pokažimo da postoji njoj inverzna matrica koja je također u M; tj., da je M zatvoren i za invertiranje. Označit ćemo tu traženu matricu s B, s istim matričnim koeficijentima kao u gore uzetoj B, te onda iskoristiti gornji račun za $AB = I$. (Jasno, I je 3×3 jedinična matrica.) Dobivamo da je

$$ax = 1 = a^2x^2, \qquad ay + bx = 0, \qquad az + cx^2 = 0.$$

Slijedi: $x = 1/a$, $\quad y = -\frac{bx}{a} = -b/a^2$, $\quad z = -\frac{cx^2}{a} = -c/a^3$; tj., $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 & -c/a^3 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$.

(1 bod) Jer je evidentno $M \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ te smo pokazali da je M i zatvioren za množenje i zatvoren za invertiranje, slijedi da je M podgrupa od $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

(3 boda) Za gore uzete A i B računamo $BA = \begin{pmatrix} xa & xb + ya & xc + za^2 \\ 0 & xa & 0 \\ 0 & 0 & x^2a^2 \end{pmatrix}$. Sada primijetimo kako je moguće da matrični koeficijenti na mjestu $(1,3)$ u matricama AB i BA budu različiti; tj., da je $az + cx^2 \neq xc + za^2$. Naprimjer to vrijedi za $a = z = c = 1$ i $x = 2$. Zaključak: M je nekomutativna grupa.

Napomena. Posebno u 4. zadatku sve mora biti popuno precizno i korektno argumentirano i izračunato kako bi se dobilo navedene bodove.

Napomena. Gore napisana rješenja zadataka su jako detaljna, i glavni im je cilj pokazati studentu kako bi zapravo trebalo rješavati zadatke na kolokvijima (te na pismenim ispitima na preostla tri ispitna roka).